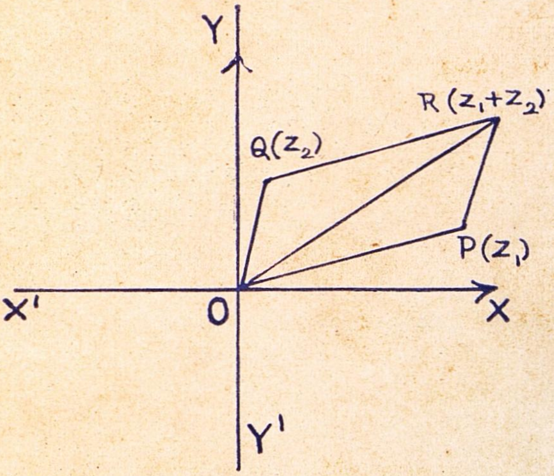
# திரிகோண கணிதம்

(TRIGONOMETRY)




து. பாஸ்கரன்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

# திரிகோண கணிதம்

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

[திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகின்றது]

ஆசிரியர்
**து. பாஸ்கரன்**, எம்.ஏ., பி.டி.,
உதவிப் பேராசிரியர்,
கணிதத் துறை,
விருதுநகர் இந்து நாடார்கள் செந்திக்குமார நாடார் கல்லூரி,
விருதுநகர்.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த.பா.நி. (க.வெ.) வரிசை எண் – 334

# திரிகோண கணிதம்

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

[திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகிறது]

ஆசிரியர்

**து. பாஸ்கரன்,** எம்.ஏ., பி.டி.,

உதவிப் பேராசிரியர்,

கணிதத் துறை,

விருதுநகர் இந்து நாடார்கள் செந்திக்குமார நாடார் கல்லூரி,

விருதுநகர்.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—June, 1972

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 334

© Tamil Nadu Text Book Society

**TRIGONOMETRY**

D. BASKARAN

Net Price Rs. 8-75
(No discount)

'Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.'

*Printed by*
Thompson & Co. Private Ltd. (Minerva Press),
33, Broadway, Madras-1.

# அணிந்துரை

**திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்**
(தமிழகக் கல்வி—உள்ளாட்சித்துறை அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினேராண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி. ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.) 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப் படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மனநிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ் வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்து வரும் பெரு முயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ் நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டுவருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான '**திரிகோண கணிதம்**' என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் **334**ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை **369** நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப் படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

**இரா. நெடுஞ்செழியன்**

# ஆசிரியரின் முன்னுரை

நமது தாய்மொழியாம் தமிழில் அறிவியற் பாடங்களைக் கற்க விரும்பும் மாணவர்களுக்குச் சிறந்த மூல நூல்கள் தேவை. இதை நிறைவு செய்யும் சிறந்த நோக்கோடு தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் செயல்பட்டு வருகிறது.

'திரிகோண கணிதம்' என்னும் இம் மூலநூல் தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக்கழகங்களின் பட்டப் படிப்புப் பாடத் திட்டங்களை யொட்டியும், மேல் பட்டப்படிப்பிற்குப் பயன்படும்படியும் எழுதப்பட்டுள்ளது. கணிதத்தைச் சிறப்புப் பாடமாகப் படிக்கும் மாணவர்களுக்கும் துணைப்பாடமாகப் படிக்கும் மாணவர்களுக்கும் இந் நூல் பயன்படும். மாணவர்கள் எளிதில் நன்ருகப் புரிந்து கொள்ள வேண்டும் என்பதைக் கருத்திற் கொண்டு, நூலில் இடம் பெற்றுள்ள தேற்றங்களும் பிற உண்மைகளும் நிறுவப்பட்டுள்ளன. அவற்றை நன்ருக மனத்தில் பதிய வைக்கவும் சிறந்த முறையில் பயன்படுத்தவும் மாதிரிக் கணக்குகள் செய்து காட்டப்பட்டுள்ளன. மாணவர்கள் தாங்களாகவே புதிய கணக்குகளைச் செய்து பயிற்சி பெறவும், வகுப்பறையில் ஆசிரியப் பெருமக்களுக்குத் துணையாக இருக்கவும் வரிசைப்படுத்தப்பட்ட கணக்குகளைக் கொண்ட பயிற்சிகளும் அவற்றின் விடைகளும் உரிய இடங்களில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. நூலில் வரும் வரையறைகள், உண்மைகள், சூத்திரங்கள் ஆகியவற்றிற்கு 1 முதல் 251 வரை எண்கள் தரப்பட்டுள்ளன. இவை பயன்படுத்தப்பட்ட இடங்கள் எல்லாம் ஆங்காங்கே சுட்டிக்காட்டப்பட்டுள்ளன. இவற்றில் மிக முக்கியமானவை என்று கருதப்பட்ட 85 சூத்திரங்கள் அடங்கிய பட்டியல் ஒன்று நூலின் தொடக்கத்தில் இடம் பெற்றுள்ளது. இந் நூலில் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள கலைச்சொற்களின் பட்டியல் நூலின் இறுதியில் தரப்பட்டுள்ளது.

விருதுநகர்,
2—11—1971

**து. பாஸ்கரன்**

## பொருளடக்கம்


| | | | பக்கம் |
|---|---|---|---|
| **1.** | **திரிகோண கணிதச் சமன்பாடுகள்** | ... | 1—25 |
| 1.1. | திரிகோண கணிதச் சமன்பாடு | ... | 1 |
| 1.2. | பொதுத் தீர்வு | ... | 1 |
| 1.3. | கொடுக்கப்பட்டுள்ள $\sin\theta$-ன் மதிப்பு K எனில், $\theta$-ன் பொதுக் கோவையைக் காணல் | ... | 1 |
| 1.4. | கொடுக்கப்பட்டுள்ள $\cos\theta$-ன் மதிப்பு K எனில், $\theta$-ன் பொதுக் கோவையைக் காணல் | ... | 2 |
| 1.5. | கொடுக்கப்பட்டுள்ள $\tan\theta$-ன் மதிப்பு K எனில், $\theta$-ன் பொதுக் கோவையைக் காணல் | ... | 3 |
| 1.6. | $\sin^2\theta = \sin^2\alpha$, $\cos^2\theta = \cos^2\alpha$, $\tan^2\theta = \tan^2\alpha$ என்ற சமன்பாடுகளின் பொதுத் தீர்வைக் காணல் | ... | 4 |
| 1.7. | மாதிரிக் கணக்குகள் | ... | 5 |
| | பயிற்சி 1 (அ) | ... | 12 |
| 1.8. | $a\cos\theta + b\sin\theta = c$, $c^2 \leqslant a^2 + b^2$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்த்தல் | ... | 20 |
| 1.9. | மாதிரிக் கணக்குகள் | ... | 21 |
| | பயிற்சி 1 (ஆ) | ... | 23 |
| **2.** | **நேர்மாறு திரிகோண கணிதச் சார்புகள்** | ... | 26—56 |
| 2.1. | நேர்மாறு சார்புகள் | ... | 26 |
| 2.2. | நேர்மாறு திரிகோண கணிதச் சார்புகள் | | 27 |
| 2.3. | நேர்மாறு வட்டச் சார்புகளின் பொது மதிப்புகளும் முதன் மதிப்புகளும் | ... | 28 |

| | | பக்கம் |
|---|---|---|
| 2.4. நேர்மாறு வட்டச் சார்புகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்புகள் | ... | 30 |
| 2.5. முக்கியச் சூத்திரங்கள் | ... | 32 |
| 2.6. மாதிரிக் கணக்குகள் | ... | 35 |
| பயிற்சி 2 (அ) | ... | 45 |
| பயிற்சி 2 (ஆ) | ... | 52 |
| **3. சிக்கல் எண்கள்** | ... | 57—128 |
| 3.1. கற்பனை எண் | ... | 57 |
| 3.2. சிக்கல் எண் | ... | 57 |
| 3.3. சிக்கல் எண்களின் சமன்மை | ... | 58 |
| 3.4. சிக்கல் எண்களின் இயற்கணிதம் | ... | 58 |
| 3.5. இணைச் சிக்கல் எண்கள் | ... | 60 |
| 3.6. சிக்கல் எண்ணின் மட்டும் வீச்சும் | ... | 61 |
| 3.7. $\lvert z_1 z_2 \rvert = \lvert z_1 \rvert . \lvert z_2 \rvert$, $\left\lvert \frac{z_1}{z_2} \right\rvert = \frac{\lvert z_1 \rvert}{\lvert z_2 \rvert}$, வீச்சு $(z_1 z_2)$ = வீச்சு $z_1$ + வீச்சு $z_2$, வீச்சு $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ = வீச்சு $z_1$ — வீச்சு $z_2$ என நிறுவல் | ... | 64 |
| 3.8. ஆர்கன் வரைபடம் | ... | 66 |
| 3.9. மாதிரிக் கணக்குகள் | ... | 68 |
| பயிற்சி 3 (அ) | ... | 84 |
| பயிற்சி 3 (ஆ) | ... | 91 |
| 3.10. $-z$ ஐ வரை கணித முறையில் குறித்தல் | | 94 |
| 3.11. $\bar{z}$ ஐ வரை கணித முறையில் குறித்தல் | ... | 95 |
| 3.12. $z_1 + z_2$ ஐ வரைகணித முறையில் குறித்தல் | ... | 96 |
| 3.13. $z - z_2$ ஐ வரை கணித முறையில் குறித்தல் | | 100 |
| 3.14. $z_1 z_2$ ஐ வரை கணித முறையில் குறித்தல் | | 101 |
| 3.15. $\frac{z_1}{z_2}$ ஐ வரைகணித முறையில் குறித்தல் | ... | 102 |
| 3.16. இரண்டு திசையிகளுடைய ஈவின் வீச்சு | ... | 104 |
| 3.17. சில முக்கிய இயங்கு வழிகள் | ... | 108 |
| 3.18. மாதிரிக் கணக்குகள் | ... | 111 |
| பயிற்சி 3 (இ) | ... | 122 |

பக்கம்

4. **டிமாவியரின் தேற்றமும் அதன் உடனடிப் பயன்களும்** ... 129—248
4.1. டிமாவியரின் தேற்றம் ... 129
4.2. மாதிரிக் கணக்குகள் ... 133
பயிற்சி 4 (அ) ... 144
4.3. $(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}$-ன் மதிப்புகள் ... 150
4.4. $(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}$-ன் முதன் மதிப்பு ... 153
4.5. சிக்கல் எண்களின் மூலங்கள் ... 153
4.6. $z^{\frac{p}{q}}$-ன் மதிப்புகள் ... 154
4.7. வரைகணித முறைப்படி சிக்கல் எண்ணின் $n$ ஆம் மூலங்களைக் குறித்தல் 154
4.8. மாதிரிக் கணக்குகள் ... 156
பயிற்சி 4 (ஆ) ... 169
4.9. $i$-ன் அடுக்குகள் ... 179
4.10. $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ என்பவற்றின் விரித்தல்கள் 180
4.11. $\tan n\theta$-ன் விரித்தல் ... 183
4.12. $\tan(\theta_1 + \theta_2 + \ldots\ldots + \theta_n)$-ன் விரித்தல் 183
4.13. மாதிரிக் கணக்குகள் ... 185
பயிற்சி 4 (இ) ... 203
4.14. $\cos^n\theta$, $\sin^n\theta$ ஆகியவற்றின் விரித்தல்கள் 210
4.15. மாதிரிக் கணக்குகள் ... 215
பயிற்சி 4 (ஈ) ... 219
4.16. $\cos\theta$-ன் விரித்தல் ... 221
4.17. $\sin\theta$-ன் விரித்தல் ... 222
4.18. $\tan\theta$-ன் விரித்தல் ... 223
4.19. மாதிரிக் கணக்குகள் ... 224
பயிற்சி 4 (உ) ... 240

5. **காரணிப்படுத்தல்** ... 249—287
5.1. முன்னுரை ... 249
5.2. $x^n - a^n$ ஐக் காரணிப்படுத்தல் ... 250

பக்கம்

5.3. $x^n + a^n$ ஐக் காரணிப்படுத்தல் ... 253
5.4. $x^{2n} - 2x^n a^n \cos n\theta + a^{2n}$ ஐக் காரணிப் படுத்தல் ... 255
5.5. டிமாவியரின் வட்டப் பண்பு ... 257
5.6. கோட்சின் வட்டப் பண்புகள் ... 258
5.7. மாதிரிக் கணக்குகள் ... 259
பயிற்சி 5 ... 281

**6. அதிபரவளைச் சார்புகள் ... 288—325**

6.1. சிக்கற்றொடரும் அதன் ஒருங்கும் தன்மையும் ... 288
6.2. அடுக்குக் குறித் தொடர் ... 289
6.3. அடுக்குக் குறித் தொடரின் ஒருங்கும் தன்மை ... 290
6.4. அடுக்குக் குறிச் சார்புகளின் பெருக்கல்... 290
6.5. அடுக்குக் குறிச் சார்பின் பொருள் ... 290
6.6. $e^z$-ன் வீச்சின் முதன் மதிப்பு ... 291
6.7. அடுக்குக் குறிச் சார்பின் காலவட்ட ஒழுங்குடைமை ... 291
6.8. $z$-ன் வட்டச் சார்புகள் ... 291
6.9. ஆய்லரின் அடுக்குக்குறி மதிப்புகள் ... 292
6.10. வட்டச் சார்புகள் சம்பந்தப்பட்ட சர்வசமங்கள் ... 293
6.11. வட்டச் சார்புகளின் காலவட்ட ஒழுங்குடைமை ... 295
6.12. அதிபரவளைச் சார்புகள் ... 296
6.13. $\sinh z$, $\cosh z$ என்ற சார்புகளுக்குரிய தொடர்கள் ... 297
6.14. அதிபரவளைச் சார்புகளின் காலவட்ட ஒழுங்குடைமை ... 297
6.15. வட்ட, அதிபரவளைச் சார்புகளுக் கிடையேயுள்ள தொடர்புகள் ... 299
6.16. அதிபரவளைச் சார்புகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்புகள் ... 300

| | | |
|---|---|---|
| | | பக்கம் |
| 6.17. | சிக்கல் சார்புகளை மெய், கற்பனைப் பகுதிகளாகப் பிரித்தல் ... | 302 |
| 6.18. | சிக்கல் கணியங்களின் நேர்மாறு வட்டச் சார்புகள் ... | 303 |
| 6.19. | நேர்மாறு அதிபரவளைச் சார்புகள் ... | 304 |
| 6.20. | நேர்மாறு அதிபரவளைச் சார்புகளை மடக்கைச் சார்புகளாகத் தெரிவித்தல் | 304 |
| 6.21. | மாதிரிக் கணக்குகள் ... | 307 |
| | பயிற்சி 6 ... | 318 |
| **7.** | **சிக்கல் எண்களின் மடக்கைகள்** ... | 326—359 |
| 7.1. | வரையறை ... | 326 |
| 7.2. | Log $w$-ன் மதிப்புகள் ... | 326 |
| 7.3. | Log $(u+iv)$-ன் மதிப்புகள் ... | 327 |
| 7.4. | Log $w$-க்குச் சார்பு விதி ... | 329 |
| 7.5. | மாதிரிக் கணக்குகள் ... | 331 |
| | பயிற்சி 7 (அ) ... | 336 |
| 7.6. | மடக்கைத் தொடர் ... | 338 |
| 7.7. | $z^w$-ன் வரையறை ... | 338 |
| 7.8. | $(x+iy)^{u+iv}$ ஐ மெய், கற்பனைப் பகுதிகளாகப் பிரித்தல் ... | 339 |
| 7.9. | டிமாவியர் தேற்றத்தின் பொது வடிவம் | 340 |
| 7.10. | ஈருறுப்புத் தொடர் ... | 341 |
| 7.11. | $\text{Log}_a z$-ன் வரையறை ... | 341 |
| 7.12. | $\text{Log}_a z$-ன் மதிப்புகள் ... | 341 |
| 7.13. | மாதிரிக் கணக்குகள் ... | 342 |
| | பயிற்சி 7 (ஆ) ... | 349 |
| 7.14. | கிரிகரியின் தொடர் ... | 350 |
| 7.15. | $\pi$-ன் மதிப்பு ... | 352 |
| 7.16. | மாதிரிக் கணக்குகள் ... | 352 |
| | பயிற்சி 7 (இ) ... | 357 |
| **8.** | **திரிகோண கணிதத் தொடர்கூட்டல்** ... | 360—434 |
| 8.1. | முன்னுரை ... | 360 |

பக்கம்

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8.2. | கூட்டு விருத்தியில் உள்ள கோணங்களினுடைய சைன்களின் அல்லது கொசைன்களின் தொடர்கள் | ... | 361 |
| | பயிற்சி 8 (அ) | ... | 371 |
| 8.3. | பெருக்கல் தொடரைச் சார்ந்த தொடர்கள் | ... | 377 |
| 8.4. | கூட்டல் - பெருக்கல் தொடரைச் சார்ந்த தொடர்கள் | ... | 383 |
| | பயிற்சி 8 (ஆ) | ... | 385 |
| 8.5. | ஈருறுப்புத் தொடரைச் சார்ந்த தொடர்கள் | ... | 387 |
| | பயிற்சி 8 (இ) | ... | 393 |
| 8.6. | அடுக்குக் குறித் தொடரைச் சார்ந்த தொடர்கள் | ... | 395 |
| | பயிற்சி 8 (ஈ) | ... | 398 |
| 8.7. | சைன், கொசைன், அதிபரவளை சைன், அதிபரவளைக் கொசைன் தொடர்களைச் சார்ந்த தொடர்கள் | ... | 400 |
| | பயிற்சி 8 (உ) | ... | 405 |
| 8.8. | மடக்கைத் தொடரைச் சார்ந்த தொடர்கள் | ... | 406 |
| 8.9. | கிரிகரியின் தொடரைச் சார்ந்த தொடர்கள் | ... | 413 |
| | பயிற்சி 8 (ஊ) | ... | 416 |
| 8.10. | வேறுபாட்டு முறைக்கு ஒத்துவரும் தொடர்கள் | ... | 420 |
| | பயிற்சி 8 (எ) | ... | 431 |
| | கலைச்சொற்கள் | ... | 435 |
| | Bibliography | ... | 441 |

## முக்கியச் சூத்திரங்கள்

1. $\sin\theta = \sin\alpha$ எனில், $\theta = n\pi + (-1)^n \alpha$
2. $\cos\theta = \cos\alpha$ எனில், $\theta = 2n\pi \pm \alpha$
3. $\tan\theta = \tan\alpha$ எனில், $\theta = n\pi + \alpha$
4. $\sin^{-1} x \pm \sin^{-1} y = \sin^{-1} [x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}]$
5. $\cos^{-1} x \pm \cos^{-1} y = \cos^{-1} [xy \mp \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}]$
6. $\tan^{-1} x \pm \tan^{-1} y = \tan^{-1} \dfrac{x \pm y}{1 \mp xy}$
7. $2\tan^{-1} x = \tan^{-1} \dfrac{2x}{1-x^2}$
8. $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z =$

$$\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}$$

9. $2\tan^{-1} x = \sin^{-1} \dfrac{2x}{1+x^2}$
10. $2\tan^{-1} x = \cos^{-1} \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$
11. $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
12. $\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2$
13. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
14. $|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$
15. வீச்சு $(x+iy) = \theta$, $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

16. $z\bar{z} = |z|^2$

17. $r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ எனில்,
$r_1 = r_2, \quad \theta_1 = 2n\pi + \theta_2$

18. $(r_1, \theta_1) \, . \, (r_2, \theta_2) = [r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2]$

19. $\dfrac{(r_1, \theta_1)}{(r_2, \theta_2)} = \left[\dfrac{r_1}{r_2}, \; \theta_1 - \theta_2\right]$

20. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

21. $|z_1 + z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$

22. $n$ ஒரு முழு எண் எனில்,
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

23. $n$ ஒரு விகிதமுறு பின்னம் எனில்,
$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$-ன் ஒரு மதிப்பு

24. $p$ ஒரு முழு எண், $q$ ஒரு நேர் முழு எண் எனில்,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{p}{q}} = \cos\frac{(p\theta + 2K\pi)}{q} + i\sin\frac{(p\theta + 2K\pi)}{q},$$

$K = 0, 1, 2, \ldots\ldots, q-1.$

25. $$\cos n\theta = \cos^n\theta - nC_2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + nC_4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta - \ldots\ldots\ldots$$

26. $$\sin n\theta = nC_1\cos^{n-1}\theta\sin\theta - nC_3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \ldots\ldots\ldots$$

27. $$\tan n\theta = \frac{nC_1\tan\theta - nC_3\tan^3\theta + nC_5\tan^5\theta - \ldots.}{1 - nC_2\tan^2\theta + nC_4\tan^4\theta - \ldots\ldots\ldots\ldots}$$

28. $$\tan(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) = \frac{S_1 - S_3 + S_5 - \ldots\ldots\ldots}{1 - S_2 + S_4 - \ldots\ldots\ldots}$$

29. $$2^{n-1}\cos^n\theta = \cos n\theta + nC_1\cos(n-2)\theta + nC_2\cos(n-4)\theta + \ldots\ldots$$

30. $n$ ஓர் ஒற்றை எண் எனில்,

$$2^{(n-1)}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin^n\theta = \sin n\theta - nC_1\sin(n-2)\theta + nC_2\sin(n-4)\theta - \ldots\ldots\ldots$$

31. $n$ ஓர் இரட்டை எண் எனில்,

$$2^{n-1}(-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n\theta = \cos n\theta - nC_1\cos(n-2)\theta + nC_2\cos(n-4)\theta - \ldots$$

32. $$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

33. $$\sin\theta = \frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

34. $$\tan\theta = \theta + \frac{1}{3}\theta^3 + \frac{2}{15}\theta^5 + \frac{17}{315}\theta^7$$

[ θ-ன் 7ஆம் அடுக்கு வரை ]

35. $$x^{2K} - a^{2K} = (x^2 - a^2)\prod_{r=1}^{K-1}\left[x^2 - 2xa\cos\frac{2r\pi}{2K} + a^2\right]$$

36. $$x^{2K+1} - a^{2K+1} = (x - a)\prod_{r=1}^{K}\left[x^2 - 2xa\cos\frac{2r\pi}{(2K+1)} + a^2\right]$$

37. $$x^{2K} + a^{2K} = \prod_{r=0}^{K-1}\left[x^2 - 2xa\cos\frac{(2r+1)\pi}{2K} + a^2\right]$$

38. $$x^{2K+1} + a^{2K+1} = (x+a)\prod_{r=0}^{K-1}\left[x^2 - 2x\,a\cos\frac{(2r+1)\pi}{(2K+1)} + a^2\right]$$

39. $$x^{2n} - 2x^n a^n\cos n\theta + a^{2n} = \prod_{r=0}^{n-1}\left[x^2 - 2xa\cos\left(\theta + \frac{2r\pi}{n}\right) + a^2\right]$$

40. $$\cos n\theta = 2^{n-1}\prod_{r=0}^{n-1}\left[\cos\theta - \cos\frac{(2r+1)\pi}{2n}\right]$$

41. $\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta} = 2^{n-1} \underset{r=1}{\overset{n-1}{\pi}} \left[\cos\theta - \cos\dfrac{r\pi}{n}\right]$

42. $\sin n\theta = 2^{n-1} \sin\theta . \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{n}\right)$

$\sin\left(\theta + \dfrac{2\pi}{n}\right) \ldots\ldots \sin\left[\theta + \dfrac{(n-1)\pi}{n}\right]$

43. $\cos n\theta = 2^{n-1} \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2n}\right) . \sin\left(\theta + \dfrac{3\pi}{2n}\right)$

$\ldots \sin\left[\theta + \dfrac{(2n-1)\pi}{2n}\right]$

44. $\cos n\theta - \cos n\phi =$

$$2^{n-1} \underset{K=0}{\overset{n-1}{\pi}} \left[\cos\theta - \cos\left(\phi + \frac{2K\pi}{n}\right)\right]$$

45. $e^{x+iy} = e^{x}\left[\cos(2r\pi + y) + i\sin(2r\pi + y)\right]$

46. $e^{z+2K\pi i} = e^{z}$

47. $e^{iz} = \cos z + i\sin z$

48. $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

49. $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

50. $\sinh z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \dfrac{z}{1!} + \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} + \ldots\ldots$

51. $\cosh z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2} = 1 + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} + \ldots\ldots\ldots$

52. $\sinh(-z) = -\sinh z$

53. $\cosh(-z) = \cosh z$

54. $\cosh(z + 2\pi i) = \cosh z$

55. $\sinh(z + 2\pi i) = \sinh z$

56. $\tanh(z + \pi i) = \tanh z$

57. $\cos iz = \cosh z$

58. $\sin iz = i \sinh z$

59. $\tan iz = i \tanh z$

60. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

61. $\sinh 2z = 2 \sinh z \,.\, \cosh z$

62. $\cosh^2 z + \sinh^2 z = \cosh 2z$

63. $\cos^{-1}(x + iy) = 2n\pi \pm \cos^{-1}(x + iy)$

64. $\sin^{-1}(x + iy) = n\pi + (-1)^n \sin^{-1}(x + iy)$

65. $\tan^{-1}(x + iy) = n\pi + \tan^{-1}(x + iy)$

66. $\sinh^{-1} x = \log_e (x + \sqrt{x^2 + 1})$

67. $\cosh^{-1} x = \log_e (x + \sqrt{x^2 - 1})$

68. $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \log_e \frac{1 + x}{1 - x}$

69. $\log (r e^{i\theta}) = \log_e r + i(2n\pi + \theta)$

70. $\log w = \log w + i\, 2n\pi$

71. $\log (u + iv) = \frac{1}{2} \log_e (u^2 + v^2) + i(2n\pi + \theta)$,

$\cos \theta = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \sin \theta = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$

72. $u > 0$ எனில், $\log u = \log_e u + i\, 2n\pi$

73. $x > 0$ எனில், $\log (-x) = \log_e x + i(2n+1)\pi$

74. $v > 0$ எனில், $\log (iv) = \log_e v + i\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

75. $y > 0$ எனில், $\log (-yi) = \log_e y + i\left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right)$

76. $\log w_1 w_2 = \log w_1 + \log w_2$

77. $\log \frac{w_1}{w_2} = \log w_1 - \log w_2$

78. $\log w^n = n \log w$

79. $z$ ஒரு சிக்கல் எண், $|z| < 1$ எனில்,

$\log (1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots\ldots\ldots$

80. $z^w = e^{w \log z}$

81. $\log_a z = \dfrac{\log z}{\log a}$

82. $\theta = \tan\theta - \dfrac{\tan^3\theta}{3} + \dfrac{\tan^5\theta}{5} - \ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\infty \left[ -\dfrac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4} \right]$

83. $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots + \sin[\alpha+(n-1)\beta]$

$= \sin\left[\alpha + (n-1)\dfrac{\beta}{2}\right] \dfrac{\sin\dfrac{n\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2}}$

84. $\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots + \cos[\alpha+(n-1)\beta]$

$= \cos\left[\alpha + (n-1)\dfrac{\beta}{2}\right] \dfrac{\sin\dfrac{n\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2}}$

# 1. திரிகோண கணிதச் சமன்பாடுகள்

## (Trigonometrical Equations)

### 1.1. திரிகோண கணிதச் சமன்பாடு (Trigonometrical Equation)

ஒன்று அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட தெரியாத கோணங்களின் (unknown angles) திரிகோண கணித விகிதங்கள் (Trigonometrical Ratios) சம்பந்தப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டிற்குத் திரிகோண கணிதச் சமன்பாடு (Trigonometrical Equation) என்று பெயர். அத்தகைய சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்தும் கோணங்களைக் காண்பதே நமது நோக்கம்.

### 1.2. பொதுத் தீர்வு (General Solution)

$\sin\theta = \frac{1}{2}$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொண்டால், $\theta = 30^\circ, 150^\circ, 390^\circ, 510^\circ$............ என்ற கோணங்கள் அந்தச் சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்தும். இந்தக் கோணங்களை அதன் தீர்வுகள் (Solutions) என அழைக்கிறோம். எல்லாத் தீர்வுகளையும் தன்னகத்தே கொண்ட கோவைக்கு $\theta$-ன் பொதுக் கோவை (General Expression) அல்லது அந்தச் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு (General Solution) என்பது பெயர்.

### 1.3. கொடுக்கப்பட்டுள்ள $\sin\theta$-ன் மதிப்பு k எனில், $\theta$-ன் பொதுக் கோவையைக் காணல்

$\theta$-ன் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு $\alpha$ எனில்,

$$\sin\theta = k = \sin\alpha$$

அதாவது, $\sin\theta - \sin\alpha = 0$

அ - து, $2 \cos \frac{\theta + \alpha}{2} . \sin \frac{\theta - \alpha}{2} = 0$

$\therefore \cos \frac{\theta + \alpha}{2} = 0$ ..............................(i)

அல்லது $\sin \frac{\theta - \alpha}{2} = 0$ ..............................(ii)

(i)-லிருந்து, $\frac{\theta + \alpha}{2} = (2r + 1) \frac{\pi}{2}$, $r$ ஒரு முழு எண் (Integer) அல்லது பூச்சியம் (Zero).

அ - து, $\theta + \alpha = (2r + 1) \pi$

$\therefore \theta = (2r + 1) \pi - \alpha$ ............(iii)

(ii)-லிருந்து, $\frac{\theta - \alpha}{2} = r \pi$, $r$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

அ - து, $\theta - \alpha = 2r \pi$

$\therefore \theta = 2r \pi + \alpha$ ....................(iv)

(iii) ஐயும் (iv) ஐயும் இணைக்க,

$\theta = n \pi + (-1)^n \alpha$, $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம். (1)

(1) தான் நமக்குத் தேவையான $\theta$-ன் பொதுக் கோவை.

குறிப்பு :

1. $|k| \leqslant 1$. அதாவது $-1 \leqslant k \leqslant 1$
2. $\sin \theta = \sin \alpha$ எனில்,
   $\theta = 2r \pi + \alpha$ அல்லது $(2r + 1) \pi - \alpha$, $r$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.
3. $\sin [n \pi + (-1)^n \alpha] = \sin \alpha$

துணை முடிவு (Corollary) :

$\text{cosec } \theta = \text{cosec } \alpha$ எனில்,

$\theta = n \pi + (-1)^n \alpha$, $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

**1.4. கொடுக்கப்பட்டுள்ள $\cos \theta$-ன் மதிப்பு k எனில், $\theta$-ன் பொதுக் கோவையைக் காணல்**

$\theta$ - ன் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு $\alpha$ எனில்,

$$\cos \theta = k = \cos \alpha$$

அ - து, $\cos\alpha - \cos\theta = 0$

அ - து, $2\sin\frac{\theta+\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$

$\therefore \quad \sin\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$ ........................(i)

அல்லது $\quad \sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$ ........................(ii)

(i)-லிருந்து, $\frac{\theta+\alpha}{2} = n\pi$, $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

அ - து, $\theta + \alpha = 2n\pi$

$\therefore \quad \theta = 2n\pi - \alpha$ ............(iii)

(ii)-லிருந்து, $\frac{\theta-\alpha}{2} = n\pi$

அ - து, $\theta - \alpha = 2n\pi$

$\therefore \quad \theta = 2n\pi + \alpha$ ............(iv)

(iii) ஐயும் (iv) ஐயும் இணைக்க,

$\theta = 2n\pi \pm \alpha$, $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம். (2)

(2) தான் நமக்குத் தேவையான $\theta$ - ன் பொதுக் கோவை.

**குறிப்பு :**

1. $|k| \leqslant 1$. அதாவது $-1 \leqslant k \leqslant 1$
2. $\cos(2n\pi \pm \alpha) = \cos\alpha$

**துணை முடிவு :**

$\sec\theta = \sec\alpha$ எனில்,

$\theta = 2n\pi \pm \alpha$, $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

## 1.5. கொடுக்கப்பட்டுள்ள tan $\theta$-ன் மதிப்பு k எனில், $\theta$-ன் பொதுக் கோவையைக் காணல்

$\theta$ - ன் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு $\alpha$ எனில்,

$$\tan\theta = k = \tan\alpha$$

அ - து, $\tan\theta - \tan\alpha = 0$

அ - து, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0$

$\therefore \quad \sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha = 0$

அ - து, $\sin(\theta - \alpha) = 0$

$\therefore \quad \theta - \alpha = n\pi$, $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

அ - து, $\theta = n\pi + \alpha$ (3)

(3) தான் நமக்குத் தேவையான $\theta$ - ன் பொதுக் கோணம்.

**குறிப்பு :**

1. k ஏதேனும் ஒரு மெய் எண் (Real Number)
2. $\tan(n\pi + \alpha) = \tan\alpha$

**துணை முடிவு :**

$\cot\theta = \cot\alpha$ எனில்,

$\theta = n\pi + \alpha$. $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

**1.6.** $\sin^2\theta = \sin^2\alpha$, $\cos^2\theta = \cos^2\alpha$, $\tan^2\theta = \tan^2\alpha$ **என்ற சமன்பாடுகளின் பொதுத் தீர்வைக் காணல்**

$\sin^2\theta = \sin^2\alpha$ என்பதிலிருந்து,

$1 - \sin^2\theta = 1 - \sin^2\alpha$

அ - து, $\cos^2\theta = \cos^2\alpha$

$\therefore \quad \tan^2\theta = \tan^2\alpha$

$\cos^2\theta = \cos^2\alpha$ என்பதிலிருந்து,

$1 - \cos^2\theta = 1 - \cos^2\alpha$

அ - து, $\sin^2\theta = \sin^2\alpha$

$\therefore \quad \tan^2\theta = \tan^2\alpha$

எனவே, $\sin^2\theta = \sin^2\alpha$, $\cos^2\theta = \cos^2\alpha$, $\tan^2\theta = \tan^2\alpha$ என்ற மூன்று சமன்பாடுகளும் ஒன்றே. ஆகவே அவைகளின் பொதுத் தீர்வும் ஒன்றே. அதைக் காண,

$\tan^2\theta = \tan^2\alpha$ என்பதை எடுத்துக் கொண்டோமானால்,

$\tan\theta = \tan\alpha$ அல்லது $\tan\theta = -\tan\alpha = \tan(-\alpha)$.

$\therefore \quad \theta = n\pi + \alpha$ அல்லது $\theta = n\pi - \alpha$ [சூத்திரம் (3)-ன் படி]

$\therefore \quad \theta = n\pi \pm \alpha$ (4)

## மாதிரிக் கணக்குகள்

**மாதிரிக் கணக்கு 1-7.1.**

**தீர்க்க :** (i) $\sin\theta = \frac{1}{2}$ (ii) $\sin\theta = -\frac{1}{2}$

(iii) $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (iv) $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(v) $\tan\theta = \sqrt{3}$ (vi) $\tan\theta = -\sqrt{3}$

(i) $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

இங்கே $\alpha = \frac{\pi}{6}$

$\therefore \quad \theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ [சூத்திரம் (1)-ன் படி]

(ii) $\sin\theta = -\frac{1}{2} = -\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

இங்கே $\alpha = -\frac{\pi}{6}$

$\therefore \quad \theta = n\pi + (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right)$

[சூத்திரம் (1)-ன் படி]

$= n\pi + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}$

(iii) $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}$

இங்கே $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$\therefore \quad \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ [சூத்திரம் (2)-ன் படி]

(iv) $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\cos\frac{\pi}{4}$

$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4}$

இங்கே $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

$\therefore \quad \theta = 2n\pi \pm \frac{3\pi}{4}$ [சூத்திரம் (2)-ன் படி]

(v) $\tan\theta = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$

இங்கே $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$\therefore \quad \theta = n\pi + \frac{\pi}{3}$ [சூத்திரம் (3)-ன் படி]

(vi) $\tan\theta = -\sqrt{3} = -\tan\frac{\pi}{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

இங்கே $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

$\therefore \quad \theta = n\pi + \left(-\frac{\pi}{3}\right)$ [சூத்திரம் (3)-ன் படி]

$= n\pi - \frac{\pi}{3}$

**மாதிரிக் கணக்கு** 1-7.2.

**தீர்க்க :** (i) $\sin^2\theta = \frac{3}{4}$

(ii) $\sec^2\theta = 2$

(iii) $\tan^2\theta = \frac{1}{3}$

(i) $\sin^2\theta = \frac{3}{4} = \sin^2\frac{\pi}{3}$

இங்கே $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$\therefore \quad \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ [சூத்திரம் (4)-ன் படி]

(ii) $\sec^2\theta = 2$

$\therefore \quad \cos^2\theta = \frac{1}{2} = \cos^2\frac{\pi}{4}$

இங்கே $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$\therefore \quad \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ [சூத்திரம் (4)-ன் படி]

(iii) $\tan^2 \theta = \frac{1}{3} = \tan^2 \frac{\pi}{6}$

இங்கே $\alpha = \frac{\pi}{6}$

$\therefore \quad \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ [சூத்திரம் (4)-ன் படி]

**மாதிரிக் கணக்கு 1-7.3.**

**தீர்க்க :** $2 \sin 4\theta = \sqrt{3}$

இங்கே $\sin 4\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ $4\theta$-ன் ஒரு மதிப்பு $\frac{\pi}{3}$

அ - து, $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$\therefore \quad 4\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}$ [சூத்திரம் (1)-ன் படி]

$\therefore \quad \theta = \frac{n}{4}\pi + (-1)^n \frac{\pi}{12}$

**மாதிரிக் கணக்கு 1-7.4.**

**தீர்க்க :** $\sin 7\theta = \sin 5\theta$

1.3.-ன் குறிப்பு 2-ன் படி,

$7\theta = 2n\pi + 5\theta$ அல்லது $7\theta = (2n+1)\pi - 5\theta$, $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

$\therefore \quad 2\theta = 2n\pi$ அல்லது $12\theta = (2n+1)\pi$

அ - து, $\theta = n\pi$ அல்லது $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{12}$

**மாற்று முறை (Aliter)**

$\sin 7\theta = \sin 5\theta$

அ - து, $\sin 7\theta - \sin 5\theta = 0$

$\therefore \quad 2\cos 6\theta \,.\, \sin\theta = 0$

$\therefore \quad \sin\theta = 0$ அல்லது $\cos 6\theta = 0$

$$\therefore \quad \theta = n\pi \text{ அல்லது } 6\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}.$$

$n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

$$\text{அ-து,} \quad \theta = n\pi \text{ அல்லது } \theta = (2n+1)\frac{\pi}{12}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 1-7.5.**

**தீர்க்க :** $\tan A = -\cot 2A$ [சென்னைப் பல்கலைக்கழகம், 1948]

$$\text{இங்கே} \quad \cot 2A = -\tan A = \cot\left(\frac{\pi}{2} + A\right)$$

$$\therefore \quad 2A\text{-ன் ஒரு மதிப்பு } \frac{\pi}{2} + A$$

$$\text{அதாவது} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} + A$$

$$\therefore \quad 2A = n\pi + \left(\frac{\pi}{2} + A\right) \quad \text{[1.5.-ன் துணை முடிவின் படி]}$$

$$\therefore \quad A = n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$= (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 1-7.6.**

**தீர்க்க :** $\tan(\pi\cot\theta) = \cot(\pi\tan\theta)$

$$\text{இங்கே} \quad \tan(\pi\cot\theta) = \tan\left[\frac{\pi}{2} - \pi\tan\theta\right]$$

$$\therefore \quad \pi\cot\theta = n\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \pi\tan\theta\right)$$

[சூத்திரம் (3)-ன் படி]

$$\therefore \quad \cot\theta = n + \frac{1}{2} - \tan\theta$$

$$\text{அ-து,} \quad \tan\theta + \cot\theta = n + \frac{1}{2}$$

$$\text{அ-து.} \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{2n+1}{2}$$

$$\text{அ-து.} \quad \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta \cdot \cos\theta} = \frac{2n+1}{2}$$

அ - து. $$\frac{1}{\sin\theta \cdot \cos\theta} = \frac{2n+1}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2\sin\theta \cdot \cos\theta} = \frac{2n+1}{4}$$

அ - து. $$\frac{1}{\sin 2\theta} = \frac{2n+1}{4},$$

அ - து. $\sin 2\theta = \dfrac{4}{2n+1} = \sin\alpha$ என இருக்கட்டும்.

$\therefore \quad 2\theta = k\pi + (-1)^{K}\alpha$, k ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம் [சூத்திரம் (1)-ன் படி]

$$\therefore \quad \theta = \frac{k}{2}\pi + (-1)^{K}\frac{\alpha}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{4}{2n+1}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 1-7.7.**

**தீர்க்க :** $\tan x + \tan 2x + \tan x \cdot \tan 2x = 1$

இங்கே $\tan x + \tan 2x = 1 - \tan x \cdot \tan 2x$

$$\therefore \quad \frac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x \cdot \tan 2x} = 1$$

அ - து. $\tan 3x = \tan \dfrac{\pi}{4}$

$$\therefore \quad 3x = n\pi + \frac{\pi}{4}$$ [சூத்திரம் (3)-ன் படி]

$$\therefore \quad x = n\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 1-7.8.**

**தீர்க்க :** $3\sin^2 x + 2\sin x - 5 = 0$

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டிலிருந்து.

$$(3\sin x + 5)(\sin x - 1) = 0$$

$\therefore \quad 3\sin x + 5 = 0$ அல்லது $\sin x - 1 = 0$

அ - து. $\sin x = -\dfrac{5}{3}$ அல்லது $\sin x = 1$

ஆனால், $\sin x \neq -\dfrac{5}{3}$

$$\therefore \quad \sin x = 1 = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}$$ [சூத்திரம் (1)-ன் படி]

**மாதிரிக் கணக்கு 1-7.9.**

**தீர்க்க :** $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0$

(சென்னைப் பல்கலைக்கழகம், 1967 ஏப்ரல்)
(மதுரைப் பல்கலைக்கழகம், 1971 ஏப்ரல்)

$\tan x = t$ எனில், $\tan 2x = \dfrac{2t}{1 - t^2}$

$$\tan 3x = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$$

இம் மதிப்புகளைக் கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டில் இட,

$$t + \frac{2t}{1 - t^2} + \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2} = 0$$

அ-து, $t\left[1 + \dfrac{2}{1 - t^2}\right] + t\left[\dfrac{3 - t^2}{1 - 3t^2}\right] = 0$

அ-து, $t\left[\dfrac{3 - t^2}{1 - t^2}\right] + t\left[\dfrac{3 - t^2}{1 - 3t^2}\right] = 0$

அ-து, $t(3 - t^2)\left[\dfrac{1}{1 - t^2} + \dfrac{1}{1 - 3t^2}\right] = 0$

அ-து, $t(3 - t^2)\dfrac{[1 - 3t^2 + 1 - t^2]}{(1 - t^2)(1 - 3t^2)} = 0$

$\therefore \quad t(3 - t^2)(2 - 4t^2) = 0$

அ-து, $t(3 - t^2)(1 - 2t^2) = 0$

$\therefore \quad t = 0$, அல்லது $3 - t^2 = 0$, அல்லது $1 - 2t^2 = 0$

அ-து, $t = 0$ அல்லது $t^2 = 3$ அல்லது $t^2 = \dfrac{1}{2}$

அ-து, $\tan x = 0$ அல்லது $\tan^2 x = 3$ அல்லது $\tan^2 x = \dfrac{1}{2}$

அ-து, $\tan x = \tan 0$ அல்லது $\tan^2 x = \tan^2 \dfrac{\pi}{3}$ அல்லது

$$\tan^2 x = \frac{1}{2} = \tan^2 35° 16'$$

$\therefore \quad x = n\pi$ அல்லது $x = n\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$ அல்லது

$$x = n.180° \pm 35° \, 16'$$

**மாதிரிக் கணக்கு 1-7.10.**

**தீர்க்க :** $\sin\theta + \sin 2\theta = \sin 3\theta$ (செ. ப. 1941)

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$\sin 3\theta - \sin\theta = \sin 2\theta$$

அ-து, $2\cos 2\theta \, . \sin\theta = 2\sin\theta \, . \cos\theta$

அ-து, $\sin\theta\,[\cos 2\theta - \cos\theta] = 0$

அ-து, $\sin\theta\left[-2\sin\dfrac{3\theta}{2} \, . \sin\dfrac{\theta}{2}\right] = 0$

$\therefore \quad \sin\dfrac{\theta}{2} = 0$ அல்லது $\sin\theta = 0$ அல்லது $\sin\dfrac{3\theta}{2} = 0$

$\therefore \quad \dfrac{\theta}{2} = n\pi$ அல்லது $\theta = n\pi$ அல்லது $\dfrac{3\theta}{2} = n\pi$,

$n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

அ-து, $\theta = 2n\pi$ அல்லது $\theta = n\pi$ அல்லது $\theta = \dfrac{2n\pi}{3}$

$\therefore \quad \theta = n\pi$ அல்லது $\dfrac{2n\pi}{3}$

**மாதிரிக் கணக்கு 1-7.11.**

$$\theta + \frac{\pi}{4} = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6},$$

$\theta - \dfrac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$ **என்ற இரு சமன்பாடுகளும் ஒரே கோணங்களைத் தருகின்றன. ஏன்?**

(செ. ப. 1951)

$\theta + \dfrac{\pi}{4} = n\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{6}$ என்பது

$\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ ..................(i)

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு.

$$\theta - \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \text{ என்பது}$$

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \text{.....................} \text{(ii)}$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு.

ஆனல், $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

$$= \cos\left[\frac{\pi}{2} - \theta - \frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$$

$$= \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

எனவே, $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ என்ற இரு சமன்பாடுகளும்

ஒன்றே. ஆகையால் இவற்றின் தீர்வுகளும் ஒன்றே. எனவே, கொடுத்துள்ள இரு சமன்பாடுகளும் ஒரே கோணங்களைத் தருகின்றன.

## பயிற்சி 1 (அ)

**பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.**

1. $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\operatorname{cosec}\theta = -\sqrt{2}$
3. $\cos\theta = \frac{1}{2}$
4. $\sec\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$
5. $\tan\theta = -1$
6. $\cot\theta = \sqrt{3}$

7. $\sin^3 \theta = -1$

8. $\cot^3 \theta = -\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

9. $\tan^2 \theta = 3$

10. $\sin^2 \theta = 1$

11. $\sec^2 \theta = 2$

12. $2\cos^2 \theta + 4\sin^2 \theta = 3$

13. $\cos 2\theta = \dfrac{1}{2}$

14. $\cot 5\theta = 1$

15. $\cos 3\theta = \cos 2\theta$

16. $\tan 2\theta = \tan \theta$

17. $\operatorname{cosec} 3\theta = \operatorname{cosec} 3\alpha$

18. $\sin \theta = \cos \alpha$

19. $\tan 5\theta = \cot 2\theta$

20. $\tan 2\theta \tan 6\theta = 1$

21. $\tan 4\theta \cot \theta + 1 = 0$

22. $\sin 5\theta = \cos 6\theta$

23. $\sin 10x + \cos 20x = 0$ (செ. ப. 1951)

24. $\sin m\theta = \sin n\theta$

25. $\cos m\theta + \cos n\theta = 0$

26. $\sin p\theta = \cos q\theta$

27. $\cot m\theta = \tan n\theta$

28. $\sin m\theta + \cos n\theta = 0$

29. $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\right) = \cot\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)$

30. $\sin\theta = 4\cos(\theta + 30^\circ)$

31. $\cos\theta = 2\sin(\theta + 10^\circ)$

32. $\cos^3\theta \sin 3\theta + \sin^3\theta \cos 3\theta = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

33. $\cos^3\theta \sin 3\theta + \sin^3\theta \cos 3\theta = \dfrac{3}{4}$

34. $\cot\theta - \tan\theta = 2$

35. $3\sin^2 x - \sin x = 0$

36. $5\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

37. $2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$

38. $9\cos^2 x + 9\sin x - 11 = 0$
39. $\sin x = \cos 2x$
40. $3\cos 2\theta + \sin\theta = 1$
41. $4\cos 2\theta + 6\sin\theta - 5 = 0$
42. $\sin x + \cos 2x = 0{\cdot}2$ (செ. ப. 1948)
43. $2\sin x + \operatorname{cosec} x = 3$
44. $\cot^2\theta - 1 = \operatorname{cosec}\theta$
45. $22\cot^2\theta - 32\operatorname{cosec}\theta + 32 = 0$
46. $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$
47. $1 + \cos\theta = 2\sin^2\theta$
48. $2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0$ (செ. ப. 1970 ஏ.)
49. $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$
50. $\sin^2\theta - 2\cos\theta + \frac{1}{4} = 0$
51. $6\cos\theta + \sec\theta = 5$
52. $\tan^2\theta + \sec\theta = 1$
53. $\cos 2\theta + 5\cos\theta = 2$ (செ. ப. 1944)
54. $\tan^2 x + \tan x - 6 = 0$
55. $\tan x + \cot x = 3$
56. $3\tan\theta - 2\cot\theta = 5$
57. $\tan x - \sqrt{3}\cot x + 1 = \sqrt{3}$
58. $\sec^2\theta - (\sqrt{3} + 1)\tan\theta + \sqrt{3} - 1 = 0$
59. $1 + \sin^3\theta = 3\sin\theta.\cos\theta$ (செ. ப. 1943)
60. $2\sin^2 x + 4\sin x\cos x = 3$
61. $\tan\theta + 4\cot 2\theta + 1 = 0$ (செ. ப. 1947)
62. $5\tan^4\theta - 1 = 4\tan^2\theta$
63. $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = 3\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$
64. $\cot\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 3\cot\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$
65. $\sin 3\theta = 8\sin^3\theta$
66. $\cos 3\theta + 8\cos^3\theta = 0$
67. $\sin 3x + \sin x = 0$
68. $\sin 3\theta - 3\sin\theta + \frac{1}{2} = 0$

69. $2 \cos 3\theta + 6 \cos \theta - 1 = 0$
70. $2 \cos 3\theta + 6 \cos \theta + 1 = 0$ (செ. ப. 1942)
71. $\tan \theta = 1 - \sec 2\theta$ (செ. ப. 1946)
72. $\tan 3\theta - 4 \tan \theta = 0$ (செ. ப. 1936)
73. $\tan 3x = \tan x + \tan 2x$
74. $\operatorname{cosec}^4 \theta + 9 \operatorname{cosec}^2 \theta - 6 \operatorname{cosec}^2 \theta . \cot \theta = 10$ (செ. ப. 1945)
75. $\sin 6\theta = \sin 4\theta + \sin 2\theta$
76. $\sin 5\theta + \sin \theta = \sin 3\theta$
77. $\sin 8\theta + \sin 6\theta = \sin 2\theta$
78. $\sin 7\theta - \sin \theta = \sin 3\theta$
79. $\sin 7\theta = \sin 4\theta - \sin \theta$
80. $\sin 4\theta - \sin 2\theta = \sin 6\theta$ (செ. ப. 1944)
81. $\cos 8\theta - \cos 4\theta = \sin 6\theta$
82. $\cos \theta - \cos 7\theta = \sin 4\theta$
83. $\sin \theta - \cos 2\theta + \cos 4\theta = 0$
84. $\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$
85. $\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$ (செ. ப. 1950)
86. $\sin 4\theta - \sin 3\theta + \sin 2\theta - \sin \theta = 0$
87. $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0$
88. $\cos 3x - \cos 4x = \cos 5x - \cos 6x$ (செ. ப. 1939)
89. $\sin 2\theta - \sin \theta = \cos 2\theta - \cos \theta$
90. $\sin 5\theta . \cos \theta = \sin 6\theta . \cos 2\theta$
91. $\sin 11\theta . \sin 4\theta + \sin 5\theta . \sin 2\theta = 0$
92. $\left(2n + \frac{1}{4}\right)\pi \pm \alpha$,

$\left(n - \frac{1}{4}\right)\pi + (-1)^n\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ என்ற இரு கோணங்களும் ஒரே கோணங்களைத் தருகின்றன என நிறுவுக.

## விடைகள்

1. $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}$

2. $\theta = n\pi + (-1)^n\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

3. $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

4. $\theta = 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}$

5. $\theta = n\pi - \frac{\pi}{4}$

6. $\theta = n\pi + \frac{\pi}{6}$

7. $\theta = n\pi + (-1)^n \left(-\frac{\pi}{2}\right)$

8. $\theta = n\pi - \frac{\pi}{3}$

9. $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

10. $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{2}$

11. $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

12. $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

13. $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

14. $\theta = \frac{n\pi}{5} + \frac{\pi}{20}$

15. $\theta = 2n\pi ;\ \frac{2n\pi}{5}$

16. $\theta = n\pi$

17. $\theta = \frac{n\pi}{3} + (-1)^n \alpha$

18. $\theta = n\pi + (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

19. $\theta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{7}$

20. $\theta = \frac{n\pi}{8} + \frac{\pi}{16}$

21. $\theta = \frac{n\pi}{5}$

22. $\theta = \frac{2}{11} n\pi + \frac{\pi}{22}$ ; $2n\pi - \frac{\pi}{2}$

23. $10x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$; $30x = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$

24. $\theta = \frac{K\pi}{m - (-1)^K n}$, K ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

25. $\theta = \frac{1}{(m+n)}(4r\pi \pm \pi)$; $\frac{1}{(m-n)}(4r\pi \pm \pi)$.

$r$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

26. $\theta = \dfrac{n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}}{p + (-1)^n q}$

27. $\theta = \frac{(2K+1)\pi}{2(m+n)}$

28. $\theta = \frac{(4K+1)\pi}{2(n-m)}$ ; $\frac{(4K-1)\pi}{2(n+m)}$

29. $\theta = p\frac{\pi}{2} + (-1)^p \frac{\alpha}{2}$, $\sin\alpha = 4n(n+1)$

30. $\theta = n\,180° + 49°\,6'$

31. $\theta = n\,180° + 18°\,20'$

32. $\theta = n\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{12}$

33. $\theta = n\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{8}$

34. $\theta = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

35. $x = n\pi$ ; $x = n\pi + (-1)^n \alpha$, $\sin\alpha = \frac{1}{3}$

36. $x = n\pi + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{2}$ ; $x = n\,.\,180°$

$+ (-1)^n\, 23°\,35'$

37. $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}$; $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$

38. $x = n\pi + (-1)^n\, 19°\,28'$ ; $x = n\pi + (-1)^n\, 41°\,49'$

39. $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$; $x = n\pi - (-1)^n \frac{\pi}{2}$

40. $\theta = n \,.\, 180^\circ + (-1)^n\ 41^\circ\ 49'$ ; $\theta = n\pi - (-1)^n \frac{\pi}{6}$

41. $\theta = n \,.\, 180^\circ + (-1)^n\ 30^\circ$ ; $\theta = n \,.\, 180^\circ$
$+ (-1)^n\ 14^\circ\ 29'$

42. $x = n \,.\, 180^\circ + (-1)^n\ 68^\circ\ 26'$ ; $\theta = n \,.\, 180^\circ$
$+ (-1)^{n+1}\ 25^\circ\ 28'$

43. $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}$; $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$

44. $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$; $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{3\pi}{2}$

45. $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}$

46. $\theta = 2n\pi$ ; $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

47. $\theta = (2n + 1)\pi$ ; $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

48. $x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

49. $x = 2n\pi$ ; $x = (2n \pm \frac{1}{3})\pi$

50. $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

51. $\theta = n \,.\, 360^\circ \pm 70^\circ\ 32'$ ; $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

52. $\theta = 2n\pi$ ; $\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

53. $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

54. $x = n\pi + \alpha$, $\tan\alpha = 2$ ; $x = (n + 1)\pi - \beta$,
$\tan\beta = 3$

55. $x = n \,.\, 180^\circ + 20^\circ\ 54'$ ; $x = n \,.\, 180^\circ + 69^\circ\ 6'$

56. $\theta = n \,.\, 180^\circ + 63^\circ\ 26'$ ; $\theta = n \,.\, 180^\circ - 18^\circ\ 26'$

57. $x = n\pi - \frac{\pi}{4}$ ; $x = n\pi + \frac{\pi}{3}$

58. $\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$; $\theta = n\pi + \frac{\pi}{3}$

59. $\theta = n \cdot 180^\circ + 45^\circ$; $\theta = n \cdot 180^\circ + 26^\circ 34'$

60. $x = n\pi + \frac{\pi}{4}$; $x = n \cdot 180^\circ + 71^\circ 30'$

61. $\theta = n\pi - \frac{\pi}{4}$; $\theta = n \cdot 180^\circ + 63^\circ 26'$

62. $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

63. $\theta = n\pi + \alpha$, $\tan \alpha = 2 + \sqrt{3}$; $\theta = n\pi + \beta$, $\tan \beta = 2 - \sqrt{3}$.

64. $\theta = n\pi + \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{6}$

65. $\theta = n\pi$; $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

66. $\theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$; $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

67. $x = n\pi$; $x = n\pi \pm \frac{\pi}{2}$

68. $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$

69. $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

70. $\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

71. $\theta = n\,180^\circ$; $\theta = n\,180^\circ + 67^\circ 30'$;
$\theta = n\,180^\circ - 22^\circ 30'$

72. $\theta = n\pi$; $\theta = n \cdot 180^\circ \pm 16^\circ 47'$

73. $x = n\pi$; $x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

74. $\theta = n\,180^\circ + 90^\circ$; $\theta = n\,180^\circ + 45^\circ$;
$\theta = n\,180^\circ + 26^\circ 34'$; $\theta = n\,180^\circ + 18^\circ 26'$

75. $\theta = n\pi$; $\theta = \frac{n\pi}{2}$; $\theta = \frac{n\pi}{3}$

76. $\theta = \frac{n\pi}{3}$; $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

77. $\theta = \frac{n\pi}{3}$; $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{8}$; $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

78. $\theta = \frac{n\pi}{3}$; $\theta = \frac{n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}$

79. $\theta = \frac{n\pi}{4}$; $\theta = \frac{2n\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}$

80. $\theta = n\pi$; $\theta = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$; $\theta = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

81. $\theta = \frac{n\pi}{6}$; $\theta = \frac{n\pi}{2} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}$

82. $\theta = \frac{n\pi}{4}$; $\theta = \frac{n\pi}{3} + (-1)^{n}\frac{\pi}{18}$

83. $\theta = n\pi$; $\theta = \frac{n\pi}{3} + (-1)^{n}\frac{\pi}{18}$

84. $\theta = \frac{n\pi}{2}$; $\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

85. $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$; $\theta = 2n\pi \pm 2\frac{\pi}{3}$

86. $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $\theta = 2n\pi$; $\theta = \frac{(2n+1)\pi}{5}$

87. $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $x = (2n+1)\frac{\pi}{4}$; $x = (2n+1)\frac{\pi}{8}$

88. $x = n\pi$; $x = (2n+1)\frac{\pi}{9}$

89. $\theta = 2n\pi$; $\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\frac{\pi}{3}$

90. $\theta = n\pi$; $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{14}$

91. $\theta = \frac{n\pi}{6}$; $\theta = \frac{n\pi}{9}$

## 1.8. $a\cos\theta + b\sin\theta = c$, $c^2 \leq a^2 + b^2$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்த்தல்

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் இரண்டு பக்கங்களையும் $\sqrt{a^2 + b^2}$ ஆல் வகுக்க,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$a$, $b$ ஆகியவைகளின் மதிப்புகள் எவையாக இருந்தாலும், $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\beta$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\beta$ ஆக இருக்கும்படி $\beta$ என்ற கோணத்தைக் காண முடியும்.

எனவே, $\cos\beta\,.\,\cos\theta+\sin\beta\,.\,\sin\theta=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

அ - து, $\cos(\theta-\beta)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$c^2\leqslant a^2+b^2$ ஆக இருப்பதால், $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha$ ஆக இருக்கும்படி $\alpha$ என்ற கோணத்தைக் காண முடியும்.

$\therefore\quad \cos(\theta-\beta)=\cos\alpha$

$\therefore\quad \theta-\beta=2n\pi\pm\alpha$ [சூத்திரம் (2)-ன் படி]

$\therefore\quad \theta=2n\pi+\beta\pm\alpha,\quad \cos\alpha=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

## மாதிரிக் கணக்குகள்

**மாதிரிக் கணக்கு 1-9.1.**

தீர்க்க : $2\cos x+5\sin x=4$ (செ.ப. 1946) (செ.ப. 1967 ஏ.)

இங்கே, $a=2$, $b=5$, $c=4$

$\therefore\quad \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{29}$

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் இரண்டு பக்கங்களையும் $\sqrt{29}$ ஆல் வகுக்க,

$$\frac{2}{\sqrt{29}}\cos x+\frac{5}{\sqrt{29}}\sin x=\frac{4}{\sqrt{29}}$$

அ - து, $\frac{2}{5{\cdot}385}\cos x+\frac{5}{5{\cdot}385}\sin x=\frac{4}{5{\cdot}385}$

அ - து, $0{\cdot}3714\cos x+0{\cdot}9285\sin x=0{\cdot}7429$

அ - து, $\cos 68^\circ 12'.\cos x+\sin 68^\circ 12'.\sin x=\cos 42^\circ 2'.$

அ - து, $\cos(x-68^\circ 12')=\cos 42^\circ 2'$

$\therefore \quad x - 68°12' = n.\, 360° \pm 42°2'$ [சூத்திரம் (2)-ன் படி]

$\therefore \quad x = n.\, 360° + 68°12' \pm 42°2'$

**மாதிரிக் கணக்கு 1-9.2.**

**தீர்க்க :** $\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 1$ (செ.ப. 1940)

இங்கே, $\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta = -1$ ..........................(i)

(i)-ல், $a = \sqrt{3}, \quad b = -1, \quad c = -1$

$\therefore \quad \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4} = 2.$

(i)-ன் இரண்டு பக்கங்களேயும் 2 ஆல் வகுக்க,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta = -\frac{1}{2}$$

அ-து, $\cos\frac{\pi}{6}\,.\,\cos\theta - \sin\frac{\pi}{6}\,.\,\sin\theta = -\frac{1}{2}$

அ-து,
$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) = -\frac{1}{2}$$
$$= -\cos\frac{\pi}{3}$$
$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \cos\frac{2\pi}{3}$$

$\therefore \quad \theta + \frac{\pi}{6} = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ [சூத்திரம் (2)-ன் படி]

$\therefore \quad \theta = 2n\pi - \frac{\pi}{6} \pm \frac{2\pi}{3}.$

**மாதிரிக் கணக்கு 1-9.3.**

**தீர்க்க :** $\cos x - \sin x = 1$

$t = \tan\frac{x}{2}$ எனில், $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$

இம் மதிப்புகளேக் கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டில் இட,

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2} = 1$$

அ - து, $1 - t^2 - 2t = 1 + t^2$

அ - து, $-2t^2 - 2t = 0$

அ - து, $-2t(t+1) = 0$

$\therefore\ t = 0$ அல்லது $t = -1$

அ - து, $\tan\frac{x}{2} = 0$ அல்லது $\tan\frac{x}{2} = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore\ \frac{x}{2} = n\pi$ அல்லது $\frac{x}{2} = n\pi + \left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore\ x = 2n\pi$ அல்லது $x = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$

## பயிற்சி 1 (ஆ)

**பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க :**

1. $\sin\theta + \cos\theta = 1$
2. $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ (மதுரைப் பல்கலைக்கழகம், 1971 ஏ.)
3. $\cos x - \sin x = 1$
4. $\sin x - \cos x = 1$
5. $\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}$
6. $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$ (ம.ப. 1970 ஏ.)
7. $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = \sqrt{2}$
8. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$
9. $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$ (ம.ப. 1969 செ.)
10. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$ (செ.ப. 1935)
11. $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta = \frac{1}{2}$ (செ.ப. 1965 செ.)
12. $\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta = 1$ (செ.ப. 1960 ஏ.)
13. $\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}$
14. $\operatorname{cosec}\theta = \cot\theta + \sqrt{3}$ (செ.ப. 1969 ஏ.)
15. $\tan x - \sqrt{2}\sec x = \sqrt{3}$ (செ.ப. 1967 செ.)
16. $3\sin x + 4\cos x = \frac{5}{2}$ (செ.ப.)
17. $3\sin x + 4\cos x = \frac{3}{2}$ (செ.ப. 1941) (செ.ப. 1961 செ.)

18. $6 \cos \theta - 8 \sin \theta = 7$ (செ.ப. 1966 ஏ.)

19. $6 \cos x - 8 \sin x = 9$ (ம.ப. 1971 செ.)

20. $8 \cos x + 15 \sin x = -5{\cdot}1$ (செ.ப. 1962 ஏ.)

21. $2 \sin x + 5 \cos x = 3$

22. $5 \cos x - 4 \sin x = 6$

23. $3 \sin \theta - 4 \cos \theta = 3$

24. $5 \cos \theta - 12 \sin \theta = 2$ (ம.ப. 1971 ஏ.)

25. $12 \cos x - 5 \sin x = 3$ (ம.ப. 1971 ஏ.)

26. $\sqrt{3} \sin 2\theta + \cos 2\theta = 2$ (செ.ப. 1968 ஏ.)

## விடைகள்

1. $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4}$

2. $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$

3. $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$

4. $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$

5. $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

6. $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$

7. $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$

8. $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$

9. $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$

10. $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

11. $\theta = n.\,360^\circ \pm 75^\circ\,31' + 30^\circ$

12. $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$

13. $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$

14. $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$

15. $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$

16. $x = n \,.\, 360^\circ \pm 60^\circ + 36^\circ\, 52'$

17. $x = n \,.\, 360^\circ \pm 72^\circ\, 32' + 36^\circ\, 52'$

18. $\theta = n \,.\, 360^\circ \pm 45^\circ\, 34'\, 30'' - 53^\circ\, 8'$

19. $x = n \,.\, 360^\circ \pm 25^\circ\, 51' - 53^\circ\, 8'$

20. $x = n \,.\, 360^\circ \pm 107^\circ\, 28' + 61^\circ\, 56'$

21. $x = n \,.\, 180^\circ + (-1)^n\, 33^\circ\, 51' - 68^\circ\, 12'$

22. $x = n \,.\, 360^\circ \pm 20^\circ\, 27' - 38^\circ\, 40'$

23. $\theta = n\pi + (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \alpha, \tan\alpha = \frac{4}{3}.$

24. $\theta = n \,.\, 360^\circ \pm 81^\circ\, 9' - 67^\circ\, 23'$

25. $x = n \,.\, 360^\circ \pm 76^\circ\, 39' - 22^\circ\, 37'$

26. $\theta = n\frac{\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}$

# 2. நேர்மாறு திரிகோண கணிதச் சார்புகள்

## (Inverse Trigonometrical Functions)

### 2.1. நேர்மாறு சார்புகள் (Inverse Functions)

$y = f(x)$ என்ற சார்பை (function) எடுத்துக் கொள்க. இந்தச் சமன்பாட்டை $x$-க்குத் தீர்த்தோமானால்,

$x = F(y)$ என்ற சார்பைப் பெறலாம்.

சான்றாக, $y = f(x) \equiv x + 7$ எனில்,

$x = F(y) \equiv y - 7,$

அல்லது $y = f(x) \equiv x^2 - 4$ எனில்,

$x = F(y) \equiv \pm \sqrt{y + 4},$

அல்லது $y = f(x) \equiv e^x$ எனில்,

$x = F(y) \equiv \log_e y$

$f, F$ என்ற சார்புகள் நேர்மாறு சார்புகள் (Inverse Functions) என அழைக்கப்படுகின்றன; ஒன்று மற்றதன் நேர்மாறு சார்பாகும். பொதுவாக $F$ ஐ $f^{-1}$ என்று குறிக்கிறோம். எனவே, $y = f(x)$ எனில், $x = f^{-1}(y)$ என்று எழுதுகிறோம்.

குறிப்பு :

$$f\left[ f^{-1}(y) \right] = f(x) = y \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$$f^{-1}\left[ f(x) \right] = f^{-1}(y) = x \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

## 2.2. நேர்மாறு திரிகோண கணிதச் சார்புகள் (Inverse Trigonometrical Functions)

$\theta$ என்பது ஏதேனும் ஒரு கோணமெனில், அதன் திரிகோண கணித விகிதங்களை (Trigonometrical Ratios) அதாவது $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$ ஆகியவற்றைத் திரிகோண கணிதச் சார்புகள் (Trigonometrical Functions) அல்லது வட்டச் சார்புகள் (Circular Functions) என அழைக்கிறோம்.

$\sin y = x$ எனில், $y$ என்ற கோணம் $x$-ன் நேர்மாறு சைன் (Inverse Sine) என்று வரையறுக்கப்படுகிறது. இதை $y = \sin^{-1} x$ என்று எழுதுகிறோம்.

$\cos y = x$ எனில், $y$ என்ற கோணம் $x$-ன் நேர்மாறு கொசைன் (Inverse Cosine) என்று வரையறுக்கப்படுகிறது. இதை $y = \cos^{-1} x$ என்று எழுதுகிறோம். இதேபோன்று $\tan^{-1} x$, $\operatorname{cosec}^{-1} x$, $\sec^{-1} x$, $\cot^{-1} x$ ஆகியவைகளும் வரையறுக்கப் படுகின்றன. இந்த ஆறு சார்புகளையும் நேர்மாறு திரிகோண கணிதச் சார்புகள் (Inverse Trigonometrical Functions) அல்லது நேர்மாறு வட்டச் சார்புகள் (Inverse Circular Functions) என அழைக்கிறோம். மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வரையறைகளிலிருந்து

$$\left.\begin{aligned}
\sin(\sin^{-1} x) &= x\\
\cos(\cos^{-1} x) &= x\\
\tan(\tan^{-1} x) &= x\\
\operatorname{cosec}(\operatorname{cosec}^{-1} x) &= x\\
\sec(\sec^{-1} x) &= x\\
\cot(\cot^{-1} x) &= x
\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7)$$

என்று அறிகிறோம்.

$\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$, $\operatorname{cosec}^{-1} x$, $\sec^{-1} x$, $\cot^{-1} x$ ஆகியவற்றை முறையே arc $\sin x$, arc $\cos x$, arc $\tan x$, arc $\operatorname{cosec} x$, arc $\sec x$, arc $\cot x$ என்றும் சிலர் குறிக்கின்றனர்.

$\sin y = x$ எனில், $-1 \leqslant x \leqslant 1$. எனவே, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ என இருந்தால்தான், $\sin^{-1} x$ வரையறுக்கப்படும். அதுபோலவே, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ என்று அமைந்தால்தான், $\cos^{-1} x$ க்குப் பொருள் உண்டு.

cosec $y = x$ எனில், $x \leqslant -1$ அல்லது $x \geqslant 1$. அதாவது $|x| \geqslant 1$. ஆகையால் $\text{cosec}^{-1} x$ வரையறுக்கப்பட, $|x| \geqslant 1$ என்று இருந்தாக வேண்டும். அதுபோன்றே, $\sec^{-1} x$ வரையறுக்கப்பட வேண்டுமானல், $|x| \geqslant 1$ என்று கொடுக்கப்பட வேண்டும்.

$\tan y = x$ எனில், $x$-ன் மதிப்பு $-\infty$-க்கும் $+\infty$-க்கும் இடையே எதுவாகவாவது இருக்கலாம். எனவே, $x$-ன் மதிப்பு எதுவாகிலும், $\tan^{-1} x$-க்கும், அதுபோன்றே $\cot^{-1} x$-க்கும் பொருள் உண்டு.

## 2.3. நேர்மாறு வட்டச் சார்புகளின் பொது மதிப்புகளும் முதன் மதிப்புகளும் (General Values and Principal Values of Circular Functions)

$y$ என்ற கோணம் கொடுக்கப்பட்டால், $\sin y$-க்கு ஒரே ஒரு மதிப்புதான் உண்டு. எடுத்துக்காட்டாக, $\sin 60°$-க்கு $\frac{\sqrt{3}}{2}$ என்ற ஒரே ஒரு மதிப்புதான் உண்டு. ஆனல், $x$ என்ற எண் கொடுக்கப்பட்டால், $\sin^{-1} x$-க்குப் பல மதிப்புகள் உண்டு. அதாவது, $\sin^{-1} x$ ஒரு பன்மதிப்புடைச் சார்பு (Many Valued Function) ஆகும். இதுபோன்றே $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$, $\text{cosec}^{-1} x$. $\sec^{-1} x$, $\cot^{-1} x$ என்பவைகளும் பன்மதிப்புடைச் சார்புகளாகும்.

சான்ருக, $\sin^{-1} \frac{1}{2}$-க்கு $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ என்ற கோணங்களும், இவைகளோடு $2\pi$-ன் மடங்குகளைச் சேர்த்தால் கிடைக்கும் கோணங்களும் மதிப்புகளாகின்றன. எனவே, $\sin^{-1} \frac{1}{2} = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ $[n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\ldots]$. $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ ஐ $\sin^{-1} \frac{1}{2}$-ன் பொது மதிப்பு (General Value) என்று அழைக்கிருேம். இப்படிக் கிடைக்கும் பல கோணங்களுள் ஒன்றை மட்டும் $\sin^{-1} \frac{1}{2}$-ன் முதன் மதிப்பு (Principal Value) என்று எடுத்துக் கொள்கிருேம்.

$f^{-1}(x)$ ஒரு நேர்மாறு வட்டச் சார்பு, $f^{-1}(x) = A$ எனில், A-ன் பல மதிப்புகளில் மிகச் சிறிய பெறுமானம் உள்ளதை (Numerically the smallest value), $f^{-1}(x)$-ன் முதன் மதிப்பு (Principal value) என எடுத்துக் கொள்கிருேம். எடுத்துக்

காட்டாக, $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\tan^{-1}(\sqrt{3})$ ஆகியவற்றின் முதன் மதிப்புகள் முறையே $30^\circ$, $-45^\circ$, $120^\circ$, $-60^\circ$ ஆகும்.

$x$ ஒரு நேர் எண் (Positive number) என்றால், $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ ஆகியவைகளின் முதன் மதிப்புகள் எல்லாம், $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ என்ற இடைவெளியில் (Interval) உள்ளன. $x$ ஓர் எதிர் எண் (Negative number) என்றால், $\sin^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ ஆகியவற்றின் முதன் மதிப்புகள் $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ என்ற இடைவெளியிலும், $\cos^{-1}x$-ன் முதன் மதிப்பு $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ என்ற இடைவெளியிலும் உள்ளன. இவ்விதமாக, $\sin^{-1}x$, $\text{cosec}^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, $\cot^{-1}x$ ஆகியவற்றின் முதன் மதிப்புகள் $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ என்ற இடைவெளியிலும், $\cos^{-1}x$, $\sec^{-1}x$ ஆகியவற்றின் முதன் மதிப்புகள் $(0, \pi)$ என்ற இடைவெளியிலும் உள்ளன.

$\theta = \sin^{-1}x$-ன் முதன் மதிப்பு $\alpha$ எனில்,

$$x = \sin\theta = \sin\alpha$$

எனவே, சூத்திரம் (1)-ன் படி,

$\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$, $n$ ஒரு முழு எண் (Integer) அல்லது பூச்சியம் (Zero).

அதாவது, $\sin^{-1}x$-ன் பொது மதிப்பு $= n\pi + (-1)^n$ $\sin^{-1}x$-ன் முதன் மதிப்பு. $\text{Sin}^{-1}x$ ஆல் பொது மதிப்பையும், $\sin^{-1}x$ ஆல் முதன் மதிப்பையும் ஒரு சிலர் குறிக்கின்றனர். அப்படிக் குறித்தால்,

$$\text{Sin}^{-1}x = n\pi + (-1)^n \sin^{-1}x \tag{8}$$

இது மாதிரியே,

$$\text{Cosec}^{-1}x = n\pi + (-1)^n \text{cosec}^{-1}x \tag{9}$$

$$\text{Cos}^{-1}x = 2n\pi \pm \cos^{-1}x \tag{10}$$

$$\text{Sec}^{-1}x = 2n\pi \pm \sec^{-1}x \tag{11}$$

$$\text{Tan}^{-1} x = n\pi + \tan^{-1} x \qquad (12)$$

$$\text{Cot}^{-1} x = n\pi + \cot^{-1} x \qquad (13)$$

என்று நிறுவலாம்.

**குறிப்பு :**

$$\left.\begin{aligned}
\text{Sin}^{-1}(\sin x) &= n\pi + (-1)^n x \\
\text{Cosec}^{-1}(\text{cosec}\, x) &= n\pi + (-1)^n x \\
\text{Cos}^{-1}(\cos x) &= 2n\pi \pm x \\
\text{Sec}^{-1}(\sec x) &= 2n\pi \pm x \\
\text{Tan}^{-1}(\tan x) &= n\pi + x \\
\text{Cot}^{-1}(\cot x) &= n\pi + x
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

## 2.4. நேர்மாறு வட்டச் சார்புகளுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்புகள் (Relations between Inverse Circular Functions)

**2-4.1.** $\sin^{-1}x = \text{cosec}^{-1}\dfrac{1}{x}$ **என நிறுவுதல்.**

**நிறுவல் :**

$\sin\theta = x$ எனில், $\text{cosec}\,\theta = \dfrac{1}{x}$ என அறிவோம்.

$$\therefore \quad \theta = \sin^{-1}x, \quad \theta = \text{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$$

$$\therefore \quad \sin^{-1}x = \text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} \qquad (15)$$

இது மாதிரியே, $\cos^{-1}\dfrac{1}{x} = \sec^{-1}\dfrac{1}{x}$ (16)

$$\tan^{-1}\frac{1}{x} = \cot^{-1}\frac{1}{x} \qquad (17)$$

என நிறுவலாம்.

**2-4.2.** $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \dfrac{\pi}{2}$ **என நிறுவுதல்**

**நிறுவல் :**

$\sin^{-1}x = \theta$ எனில்,

$$x = \sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\therefore \quad \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\therefore \quad \theta + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

அ-து, $$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} \qquad (18)$$

இது போலவே, $$\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2} \qquad (19)$$

$$\operatorname{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2} \qquad (20)$$

என்று நிறுவலாம்.

**2-4.3.** (i) $\sin^{-1} x + \sin^{-1}(-x) = 0$
(ii) $\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi$
(iii) $\tan^{-1} x + \tan^{-1}(-x) = 0$ **என நிறுவுதல்**

**நிறுவல் :**

(i) $\sin^{-1} x = \theta$ எனில், $x = \sin\theta$

இப்போது, $\sin(-\theta) = -\sin\theta = -x$

$$\therefore \quad (-\theta) = \sin^{-1}(-x)$$

$$\therefore \sin^{-1} x + \sin^{-1}(-x) = \theta + (-\theta) = 0 \qquad (21)$$

(ii) $\cos^{-1} x = \theta$ எனில், $x = \cos\theta$

இப்போது, $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta = -x$

$$\therefore \quad \pi - \theta = \cos^{-1}(-x)$$

$$\therefore \quad \cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \theta + (\pi - \theta) = \pi. \qquad (22)$$

(iii) $\tan^{-1} x = \theta$ எனில், $x = \tan\theta$

இப்பொழுது, $\tan(-\theta) = -\tan\theta = -x$

$$\therefore \quad (-\theta) = \tan^{-1}(-x)$$

$$\therefore \quad \tan^{-1} x + \tan^{-1}(-x) = \theta + (-\theta) = 0 \qquad (23)$$

## முக்கியச் சூத்திரங்கள் (Important Formulae)

**2·5.1.** $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right]$ என நிறுவுதல்

**நிறுவல் :**

$$\sin^{-1} x = A, \quad \sin^{-1} y = B \text{ எனில்},$$

$$x = \sin A, \qquad y = \sin B.$$

இப்போது, $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$= x\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}\, y$$

$$\therefore \quad A + B = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right]$$

அ-து, $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right]$ (24)

இது போலவே,

$$\sin^{-1} x - \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right] \quad (25)$$

$$\cos^{-1} x + \cos^{-1} y = \cos^{-1}\left[xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right] \quad (26)$$

$$\cos^{-1} x - \cos^{-1} y = \cos^{-1}\left[xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right] \quad (27)$$

என நிறுவலாம்.

**துணை முடிவுகள் :**

1. சூத்திரம் (24)-ல் $y$-க்குப் பதில் $x$ ஐ இட,

$$\sin^{-1} x + \sin^{-1} x = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-x^2}\right]$$

அ-து, $2\sin^{-1} x = \sin^{-1}\left[2x\sqrt{1-x^2}\right]$ (28)

2. சூத்திரம் (26)-ல் $y$-க்குப் பதில் $x$ ஐ இட,

$$\cos^{-1} x + \cos^{-1} x = \cos^{-1}[x^2 - (1 - x^2)]$$

அ-து, $2\cos^{-1} x = \cos^{-1}[2x^2 - 1]$ (29)

**2·5·2.** $2\sin^{-1} x = \cos^{-1}[1 - 2x^2]$ என நிறுவுதல்

**நிறுவல் :**

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ என அறிவோம்.

$\therefore \quad 2\theta = \cos^{-1}[1 - 2\sin^2\theta]$

$\sin\theta = x$ எனில், $\theta = \sin^{-1} x$

$\therefore \quad 2\sin^{-1} x = \cos^{-1}[1 - 2x^2]$ (30)

**2-5.3.** $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \dfrac{x+y}{1-xy}$ என நிறுவுதல்

**நிறுவல் :**

$\tan^{-1} x = A, \qquad \tan^{-1} y = B$ எனில்,

$x = \tan A, \qquad y = \tan B.$

இப்பொழுது, $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \ \tan B} = \dfrac{x+y}{1-xy}$

$\therefore \qquad A + B = \tan^{-1} \dfrac{x+y}{1-xy}$

அ-து, $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \dfrac{x+y}{1-xy}$ (31)

இது போலவே,

$\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1} \dfrac{x-y}{1+xy}$ (32)

என்று நிறுவலாம்.

**துணை முடிவுகள் :**

1. சூத்திரம் (31)-ல் $y$-க்குப் பதில் $x$ ஐ இட,

$\tan^{-1} x + \tan^{-1} x = \tan^{-1} \dfrac{x+x}{1-x \cdot x}$

அ-து, $2 \tan^{-1} x = \tan^{-1} \dfrac{2x}{1-x^2}$ (33)

2. $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z =$

$\tan^{-1} \dfrac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}$ (34)

ஏனென்றால்,

$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z$

$= \tan^{-1} \dfrac{x+y}{1-xy} + \tan^{-1} z$ [சூத்திரம் (31)-ன் படி]

$= \tan^{-1} \dfrac{\dfrac{x+y}{1-xy} + z}{1 - \left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right) z}$ [சூத்திரம் (31)-ன் படி]

$$= \tan^{-1} \frac{\dfrac{x+y+z-xyz}{1-xy}}{\dfrac{1-xy-xz-yz}{1-xy}}$$

$$= \tan^{-1} \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}$$

**2-5.4.** (i) $2\tan^{-1} x = \sin^{-1} \dfrac{2x}{1+x^2}$

(ii) $2\tan^{-1} x = \cos^{-1} \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ என நிறுவுதல்.

**நிறுவல் :**

(i) $\sin 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ என அறிவோம்.

$\therefore \quad 2\theta = \sin^{-1} \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

$x = \tan\theta$ எனில், $\theta = \tan^{-1} x$

$$\therefore \quad 2\tan^{-1} x = \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} \tag{35}$$

(ii) $\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ என அறிவோம்.

$\therefore \quad 2\theta = \cos^{-1} \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$x = \tan\theta$ எனில், $\theta = \tan^{-1} x$.

$$\therefore \quad 2\tan^{-1} x = \cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2} \tag{36}$$

2-5·5. (i) $3\sin^{-1} x = \sin^{-1}[3x-4x^3]$

(ii) $3\cos^{-1} x = \cos^{-1}[4x^3-3x]$

(iii) $3\tan^{-1} x = \tan^{-1}\left[\dfrac{3x-4x^3}{1-3x^2}\right]$ என நிறுவுதல்

**நிறுவல் :**

(i) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ என அறிவோம்.

$$\therefore \quad 3\,\theta = \sin^{-1}[3 \sin\theta - 4 \sin^3\theta]$$

$\sin\theta = x$ எனில், $\theta = \sin^{-1} x$.

$$\therefore \quad 3 \sin^{-1} x = \sin^{-1}[3x - 4x^3] \qquad (37)$$

(ii) $\cos\ 3\,\theta = 4 \cos^3\theta - 3\cos\theta$ என அறிவோம்.

$$\therefore \quad 3\,\theta = \cos^{-1}[4 \cos^3\theta - 3\cos\theta]$$

$\cos\theta = x$ எனில், $\theta = \cos^{-1} x$.

$$\therefore \quad 3 \cos^{-1} x = \cos^{-1}[4x^3 - 3x] \qquad (38)$$

(iii) $\tan\ 3\,\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$ என அறிவோம்.

$$\therefore \quad 3\,\theta = \tan^{-1}\left[\frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}\right]$$

$\tan\theta = x$ எனில், $\theta = \tan^{-1} x$.

$$\therefore \quad 3 \tan^{-1} x = \tan^{-1}\left[\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}\right] \qquad (39)$$

குறிப்பு :

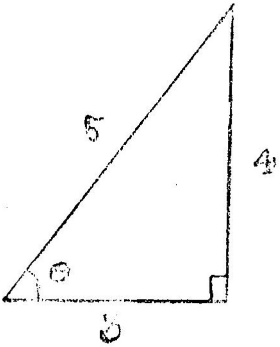
நேர்மாறு வட்டச் சார்புகள் பன்மதிப்புடைச் சார்புகளாக இருப்பதால், 24 முதல் 39 வரை உள்ள சூத்திரங்களுக்கு மிகுந்த கவனத்துடன் விளக்கங்கள் தர வேண்டும். ஒவ்வொரு சூத்திரத்தினுடைய இடக்கைப் பக்கத்தின் ஒரு மதிப்பு அதன் வலக்கைப் பக்கத்தின் ஒரு மதிப்பிற்குச் சமம் என்ற கருத்திலேயே அச் சூத்திரங்கள் உண்மையானவை ஆகும். குறிப்பாக, இடக்கைப் பக்கத்தின் முதன் மதிப்பு வலக்கைப் பக்கத்தின் முதன் மதிப்பிற்குச் சமமாக இருக்க வேண்டிய அவசியம் இல்லை.

## மாதிரிக் கணக்குகள்

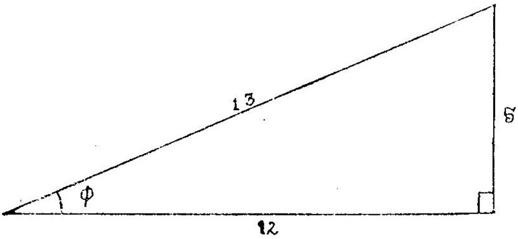
**மாதிரிக் கணக்கு 2-6.1.**

$\sin^{-1}\dfrac{4}{5} + \cos^{-1}\dfrac{12}{13} = \tan^{-1}\dfrac{63}{16}$ என நிறுவுக.

$\sin^{-1}\frac{4}{5} = \theta$, $\cos^{-1}\frac{12}{13} = \phi$ ஆக இருக்கும்படி இரண்டு படங்கள் வரைக.




படம் 1.




படம் 2.

இப்பொழுது,

$$\sin^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{12}{13}$$

$$= \theta + \phi$$

$$= \tan^{-1}\tan(\theta + \phi)$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta\tan\phi}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{4}{3} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{4}{3}\cdot\frac{5}{12}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{48+15}{36}}{\frac{36-20}{36}}\right]$$

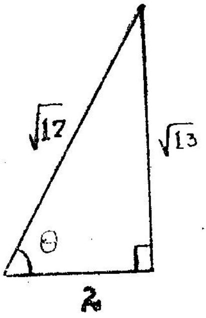
$$= \tan^{-1}\frac{63}{16}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 2-6.2.**

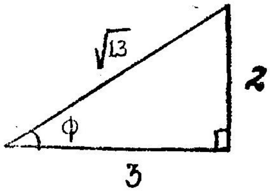
$$\cot\left[\sin^{-1}\sqrt{\frac{13}{17}}\right] = \sin\left[\tan^{-1}\frac{2}{3}\right]$$ எனக் காட்டுக.

(செ. ப. 1967 ஏ.)

$\sin^{-1}\sqrt{\frac{13}{17}} = \theta$, $\tan^{-1}\frac{2}{3} = \phi$ ஆக இருக்கும்படி இரண்டு படங்கள் வரைக.




படம் 3.




படம் 4.

இப்பொழுது, $\cot\left[\sin^{-1}\sqrt{\frac{13}{17}}\right] = \cot\theta$

$$= \frac{2}{\sqrt{13}} \qquad \text{...........(i)}$$

$$\sin\left[\tan^{-1}\frac{2}{3}\right] = \sin\phi$$

$$= \frac{2}{\sqrt{13}} \qquad \text{...........(ii)}$$

(i), (ii) லிருந்து,

$$\cot\left[\sin^{-1}\sqrt{\frac{13}{17}}\right] = \sin\left[\tan^{-1}\frac{2}{3}\right]$$

**மாதிரிக் கணக்கு 2-6.3.**

$\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{3}{5}$ **என நிறுவுக.**

$$\tan^{-1}\tfrac{1}{2} + \tan^{-1}\tfrac{1}{3} = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}$$

[சூத்திரம் (31)-ன் படி]

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}$$

$$= \tan^{-1} 1 \qquad \text{...........(i)}$$

$$\tan^{-1}\tfrac{1}{4}+\tan^{-1}\tfrac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}}$$

[சூத்திரம் (31)-ன் படி]

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{17}{20}}{\frac{17}{20}}$$

$$=\tan^{-1}1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

(i). (ii) லிருந்து,

$$\tan^{-1}\tfrac{1}{2}+\tan^{-1}\tfrac{1}{3}=\tan^{-1}\tfrac{1}{4}+\tan^{-1}\tfrac{3}{5}.$$

**மாதிரிக் கணக்கு 2-6.4.**

$$\sec^{-1}\sqrt{1+x^2}+\operatorname{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{1+y^2}}{y}+\cot^{-1}\frac{1}{z}=3\pi$$

எனில், $x+y+z=xyz$ என நிறுவுக.

$x=\tan\theta$ எனில், $\theta=\tan^{-1}x$.

இப்பொழுது, $\sec^{-1}\sqrt{1+x^2}=\sec^{-1}\sqrt{\sec^2\theta}=\sec^{-1}(\sec\theta)$

$$=\theta$$

$$=\tan^{-1}x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

$y=\tan\alpha$ எனில், $\alpha=\tan^{-1}y$

இப்பொழுது, $\operatorname{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{1+y^2}}{y}=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{\sec\alpha}{\tan\alpha}$

$$=\operatorname{cosec}^{-1}(\operatorname{cosec}\alpha)$$

$$=\alpha$$

$$=\tan^{-1}y \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

சூத்திரம் (17)-ன் படி, $\cot^{-1}\frac{1}{z}=\tan^{-1}z \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(iii)}$

$$\sec^{-1}\sqrt{1+x^2}+\operatorname{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{1+y^2}}{y}+$$

$$\cot^{-1}\frac{1}{z}=3\pi \quad \text{(கொள்கை)}$$

அ-து, $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=3\pi$

[ (i), (ii), (iii)-லிருந்து ]

அ-து, $\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}=3\pi$

[சூத்திரம் (34)-ன் படி]

$$\therefore \quad \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx} = \tan 3\pi = 0$$

$$\therefore \quad x+y+z-xyz = 0$$

$$\therefore \quad x+y+z = xyz.$$

**மாதிரிக் கணக்கு 2-6.5.**

$\cos^{-1} p + \cos^{-1} q + \cos^{-1} r = \pi$ **எனில்,**

$p^2 + q^2 + r^2 + 2\,pqr = 1$ **என நிறுவுக.**

$\cos^{-1} p + \cos^{-1} q + \cos^{-1} r = \pi$ (கொள்கை)

அ - து, $\cos^{-1} p + \cos^{-1} q = \pi - \cos^{-1} r$

அ - து, $\cos^{-1}\left[pq - \sqrt{1-p^2}\,\sqrt{1-q^2}\right]$

$= \pi - \cos^{-1} r$ [சூத்திரம் (26) -ன் படி]

$= \cos^{-1}(-r)$ [சூத்திரம் (22) -ன் படி]

$$\therefore \quad pq - \sqrt{1-p^2}\,\sqrt{1-q^2} = -r$$

அ - து, $pq + r = \sqrt{1-p^2}\,\sqrt{1-q^2}$

$$\therefore \quad p^2q^2 + 2\,pqr + r^2 = (1-p^2)(1-q^2)$$

$$= 1 - p^2 - q^2 + p^2q^2$$

$$\therefore \quad p^2 + q^2 + r^2 + 2\,pqr = 1$$

**மாதிரிக் கணக்கு 2-6.6.**

$\cos^{-1}\dfrac{x}{a} + \cos^{-1}\dfrac{y}{b} = \theta$ **எனில்,**

$\dfrac{x^2}{a^2} - 2\,\dfrac{xy}{ab}\cos\theta + \dfrac{y^2}{b^2} = \sin^2\theta$ **என நிறுவுக.**

$\theta = \cos^{-1}\dfrac{x}{a} + \cos^{-1}\dfrac{y}{b}$ (கொள்கை)

$$\therefore \quad \cos\theta = \cos\left[\cos^{-1}\frac{x}{a} + \cos^{-1}\frac{y}{b}\right]$$

$$= \cos\left[\cos^{-1}\left\{\frac{xy}{ab} - \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\right\}\right]$$

[சூத்திரம் (26)-ன் படி]

$$= \frac{xy}{ab} - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$$

[சூத்திரம் (7)-ன்படி]

அ-து, $$\cos\theta - \frac{xy}{ab} = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$$

$$\therefore \quad \left(\cos\theta - \frac{xy}{ab}\right)^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

அ-து, $$\cos^2\theta - 2\frac{xy}{ab}\cos\theta + \frac{x^2y^2}{a^2b^2}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2y^2}{a^2b^2}$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2} - 2\frac{xy}{ab}\cos\theta + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$$

**மாதிரிக் கணக்கு 2-6.7.**

$$2\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right] = \cos^{-1}\left[\frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}\right]$$

**எனக் காட்டுக.**

$$2\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right] = \theta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது,

$$\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right] = \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \quad \tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}$$

$$\therefore \quad \tan^2\frac{\theta}{2} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)\tan^2\frac{x}{2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

$$\cos\theta = \frac{1 - \tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\dfrac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{a-b}{a+b}\right) \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \left(\frac{a-b}{a+b}\right) \tan^2 \frac{x}{2}} \qquad \text{[(ii)-லிருந்து]}$$

$$= \frac{(a+b) - (a-b)\tan^2 \frac{x}{2}}{(a+b) + (a-b)\tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{b\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) + a\left(1 - \tan^2 \frac{x}{2}\right)}{a\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) + b\left(1 - \tan^2 \frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{b + a\left(\dfrac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}\right)}{a + b\left(\dfrac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}\right)}$$

$$= \frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\left[\frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}\right] \qquad \text{.............. (iii)}$$

(i), (iii)-லிருந்து,

$$2\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2}\right] = \cos^{-1}\left[\frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}\right]$$

**மாதிரிக் கணக்கு 2-6.8.**

தீர்க்க : $\cos^{-1} x - \cos^{-1} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3}$

$$\cos^{-1} x - \cos^{-1} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3}$$

அ-து, $\cos^{-1}\left[x \cdot \frac{x}{2} + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right] = \frac{\pi}{3}$

[சூத்திரம் (27)-ன் படி]

$$\therefore \quad \frac{x^2}{2} + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

அ-து, $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}$

$$= \tfrac{1}{2}(1-x^2)$$

$$\therefore \quad (1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{4}\right) = \tfrac{1}{4}(1-x^2)^2$$

அ-து, $(1-x^2)(4-x^2) = (1-x^2)^2$

அ-து, $(1-x^2)[4-x^2-(1-x^2)] = 0$

அ-து, $(1-x^2)(3) = 0$

$$\therefore \quad 1-x^2 = 0$$

$$\therefore \quad x = \pm 1$$

**மாதிரிக் கணக்கு 2-6.9.**

தீர்க்க :

$$\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1}\frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$$

(செ. ப. 1967 செப்டம்பர்)

$$\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1}\frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$$

அ-து, $\tan^{-1}\dfrac{\dfrac{x-1}{x-2} + \dfrac{x+1}{x+2}}{1-\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)} = \frac{\pi}{4}$

[சூத்திரம் (31)-ன் படி]

$$\therefore \quad \frac{\dfrac{x-1}{x-2} + \dfrac{x+1}{x+2}}{1-\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{x-1}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}=1-\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$$

அ - து, $(x-1)(x+2)+(x+1)(x-2)$

$$=(x-2)(x+2)-(x-1)(x+1)$$

அ - து, $x^2+x-2+x^2-x-2=x^2-4-(x^2-1)$

அ - து, $2x^2-4=-3$

அ - து, $2x^2=1$

அ - து, $x^2=\frac{1}{2}$

$$\therefore \quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 2-6.10.**

**தீர்க்க:** $2\tan^{-1}(\cos x)=\tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$

$$2\tan^{-1}(\cos x)=\tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$$

அ - து, $\tan^{-1}\dfrac{2\cos x}{1-\cos^2 x}=\tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$

[சூத்திரம் (33)-ன் படி]

$$\therefore \quad \frac{2\cos x}{1-\cos^2 x}=2\operatorname{cosec} x$$

அ - து, $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}=\operatorname{cosec} x$

அ - து, $\cos x.\operatorname{cosec}^2 x-\operatorname{cosec} x=0$

அ - து, $\operatorname{cosec} x\,[\cos x.\operatorname{cosec} x-1]=0$

ஆனால், $\operatorname{cosec} x\neq 0$

$\therefore \quad \cos x.\operatorname{cosec} x-1=0$

அ - து, $\cot x-1=0$

அ - து, $\cot x=1=\cot\dfrac{\pi}{4}$

$$\therefore \quad x=n\pi+\frac{\pi}{4}$$

[1.5.-ன் துணை முடிவின் படி]

**மாதிரிக் கணக்கு 2·6.11.**

**தீர்க்க :** $\sin\left[2\cos^{-1}\left\{\cot(2\tan^{-1}x)\right\}\right]=0$

$$\sin\left[2\cos^{-1}\left\{\cot(2\tan^{-1}x)\right\}\right]=0$$

அ - து, $\sin\left[2\cos^{-1}\left\{\cot\left(\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right)\right\}\right]=0$

[சூத்திரம் (33)-ன் படி]

அ - து, $\sin\left[2\cos^{-1}\left\{\cot\left(\cot^{-1}\frac{1-x^2}{2x}\right)\right\}\right]=0$

[சூத்திரம் (17)-ன் படி]

அ - து, $\sin\left[2\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{2x}\right)\right]=0$ [சூத்திரம் (7)-ன் படி]

$\therefore\quad 2\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{2x}\right)=n\pi$, $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

அ - து, $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{2x}\right)=\frac{n\pi}{2}$

$$\therefore\quad \frac{1-x^2}{2x}=\cos\frac{n\pi}{2}$$

ஆனால், $\cos\frac{n\pi}{2}=0$ அல்லது $1$ அல்லது $-1$

எனவே, $\frac{1-x^2}{2x}=0$ அல்லது $1$ அல்லது $-1$

$\frac{1-x^2}{2x}=0$ எனில், $1-x^2=0$

$$\therefore\quad x=\pm 1$$

$\frac{1-x^2}{2x}=1$ எனில், $x^2+2x-1=0$

$$\therefore\quad x=-1\pm\sqrt{2}$$

$\frac{1-x^2}{2x}=-1$ எனில், $x^2-2x-1=0$

$$\therefore\quad x=1\pm\sqrt{2}$$

## பயிற்சி 2 (அ)

**பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.**

1. $\sin^{-1}\frac{12}{13} = \tan^{-1}\frac{12}{5}$

2. $\cos^{-1}\frac{3}{5} = \cot^{-1}\frac{3}{4}$

3. $\sec^{-1}\frac{17}{15} = \text{cosec}^{-1}\frac{17}{8}$

4. $2\sin^{-1}\frac{3}{5} = \sin^{-1}\frac{24}{25} = \tan^{-1}\frac{24}{7}$

5. $2\sin^{-1}\frac{5}{13} = \tan^{-1}\frac{120}{119}$

6. $2\cos^{-1}\frac{4}{5} = \cos^{-1}\frac{7}{25}$

7. $2\cos^{-1}\frac{3}{5} = \cos^{-1}\left(-\frac{7}{25}\right)$

8. $2\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}} = \cos^{-1}x$

9. $2\tan^{-1}\frac{1}{3} = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

10. $2\tan^{-1}\frac{1}{5} = \tan^{-1}\frac{5}{12}$

11. $2\cot^{-1}\frac{5}{4} = \tan^{-1}\frac{40}{9}$

12. $2\tan^{-1}\frac{8}{15} = \sin^{-1}\frac{240}{289}$

13. $2\cot^{-1}x = \text{cosec}^{-1}\frac{1+x^2}{2x}$

14. $3\sin^{-1}\frac{1}{2} = \sin^{-1}1$

15. $3\cos^{-1}\frac{4}{5} = \cos^{-1}\left(-\frac{44}{125}\right)$

16. $3\tan^{-1}\frac{2}{3} = \tan^{-1}\left(-\frac{46}{9}\right)$

17. $\sin^{-1}\frac{4}{5} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = 90^\circ$

18. $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{10}} + \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{4}$

19. $\sin^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{8}{17} = \sin^{-1}\frac{77}{85}$

20. $\sin^{-1}\frac{2mn}{m^2+n^2} + \sin^{-1}\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2} = \frac{\pi}{2}$

21. $\sin^{-1}\frac{3}{5} - \sin^{-1}\frac{5}{13} = \sin^{-1}\frac{16}{65}$

22. $\cos^{-1}\frac{63}{65} + \cos^{-1}\frac{12}{13} = \cos^{-1}\frac{4}{5}$

23. $\cos^{-1}\frac{16}{65} - \cos^{-1}\frac{3}{5} = \cos^{-1}\frac{12}{13}$

24. $\cos^{-1}\frac{33}{65} - \cos^{-1}\frac{4}{5} = \cos^{-1}\frac{12}{13}$

25. $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$

26. $\tan^{-1}\frac{4}{3} + \tan^{-1}7 = \frac{3\pi}{4}$

27. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}$

28. $\tan^{-1}\frac{m}{m+1} + \tan^{-1}\frac{1}{2m+1} = \frac{\pi}{4}$

29. $\tan^{-1}\frac{2a-b}{b\sqrt{3}} + \tan^{-1}\frac{2b-a}{a\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$

30. $\cot^{-1}\frac{7}{5} + \cot^{-1}6 = \frac{\pi}{4}$

31. $\tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{2}{3} = \tan^{-1}\frac{17}{19}$

32. $\tan^{-1}\frac{3}{8} + \tan^{-1}\frac{2}{9} = \tan^{-1}\frac{43}{66}$

33. $\tan^{-1} 3 + \tan^{-1} 4 = \tan^{-1}\left(-\frac{7}{11}\right)$

34. $\tan^{-1} n + \cot^{-1}(n+1) = \tan^{-1}(n^2+n+1)$

35. $\tan^{-1}\frac{1}{3} - \tan^{-1}\frac{1}{13} = \tan^{-1}\frac{1}{4}$

36. $\tan^{-1}\frac{m}{n} - \tan^{-1}\frac{m-n}{m+n} = \frac{\pi}{4}$

37. $\tan^{-1}\frac{7}{4} - \tan^{-1}\frac{1}{6} = \tan^{-1}\frac{38}{31}$

38. $\cot^{-1}\frac{1}{3} - \cot^{-1} 3 = \cot^{-1}\frac{3}{4}$

39. $\cot^{-1}\frac{4}{3} - \cot^{-1}\frac{15}{8} = \cot^{-1}\frac{84}{13}$

40. $\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab} + \tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc} + \tan^{-1}\frac{c-a}{1+ca} = 0$

41. $\cot^{-1}\frac{pq+1}{p-q} + \cot^{-1}\frac{qr+1}{q-r} + \cot^{-1}\frac{rp+1}{r-p} = 0$

42. $2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$

43. $2\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{4} = \tan^{-1}\frac{32}{43}$

44. $2\tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{2}{11} = \tan^{-1}\frac{1}{2}$

45. $2\tan^{-1}\frac{1}{3} - \tan^{-1}\frac{1}{4} = \tan^{-1}\frac{8}{19}$

46. $4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$

47. $\cos\left(2\tan^{-1}\frac{1}{7}\right) = \sin\left(4\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)$

48. $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \tan^{-1}\frac{5}{6} + \tan^{-1}\frac{1}{11}$

49. $\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} - \tan^{-1}\frac{7}{9} = 0$

50. $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

51. $\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{9}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

52. $\tan^{-1}\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}-\tan^{-1}\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\pi}{2}-\alpha$

53. $\tan^{-1}\frac{x\cos\phi}{1-x\sin\phi}-\cot^{-1}\frac{\cos\phi}{x-\sin\phi}=\phi$

54. $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\tan^{-1}\frac{3}{4}=\frac{\pi}{2}$

55. $\cot^{-1}3+\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{5}=\frac{\pi}{4}$

56. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{10}=\frac{\pi}{4}$

57. $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}=\cos^{-1}\frac{33}{65}$

58. $\cos^{-1}\frac{4}{5}+\tan^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{27}{11}$

59. $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\cos^{-1}\frac{15}{17}=\sin^{-1}\frac{77}{85}$

60. $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}=\cot^{-1}\frac{2}{11}$

61. $\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{7}{25}=\cos^{-1}\frac{253}{325}$ (ம.ப. 1971 செ.)

62. $\tan^{-1}m+\tan^{-1}n=\cos^{-1}\frac{1-mn}{\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}$

63. $\cos^{-1}\frac{16}{65}-\cos^{-1}\frac{12}{13}=\sin^{-1}\frac{4}{5}$

64. $\sin^{-1}\frac{4}{5}-\tan^{-1}\frac{20}{21}=\sin^{-1}\frac{24}{145}$

65. $\cot^{-1}\frac{21}{20}-\sec^{-1}\frac{13}{12}=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{377}{135}$

66. $\cos^{-1}\frac{1}{2}+2\sin^{-1}\frac{1}{2}=120^\circ$

67. $\cos^{-1}\frac{63}{65} + 2\tan^{-1}\frac{1}{5} = \sin^{-1}\frac{3}{5}$

68. $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$

69. $2\tan^{-1}\frac{2}{3} - \operatorname{cosec}^{-1}\frac{5}{3} = \sin^{-1}\frac{33}{65}$

70. $\cos^{-1}\frac{1}{2} + \sin^{-1}\frac{1}{2} + \cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = 120°$

71. $\cos^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{12}{13} + \cos^{-1}\frac{56}{65} = \frac{\pi}{2}$

72. $\tan^{-1}1 + \tan^{-1}2 + \tan^{-1}3 = \pi$

73. $\tan^{-1}1 + \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$

74. $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

75. $\tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{8}{19} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$

76. $\tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \cot^{-1}\frac{23}{11} = \frac{\pi}{4}$

77. $\cot^{-1}7 + \cot^{-1}8 + \cot^{-1}18 = \cot^{-1}3$

78. $2\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + 2\tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

(ம.ப. 1971 செ.)

79. $\cos^{-1}\frac{63}{65} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \cot^{-1}5 = \sin^{-1}\frac{3}{5}$

80. $\sin^{-1}\frac{4}{5} + \sin^{-1}\frac{5}{13} + \sin^{-1}\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$

81. $\sin^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{8}{17} + \sin^{-1}\frac{36}{85} = \frac{\pi}{2}$

82. $\tan^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{3}{5} - \tan^{-1}\frac{8}{19} = \frac{\pi}{4}$

83. $\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7} - \tan^{-1}\frac{1}{5} = \tan^{-1}\frac{3}{11}$

84. $2\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{5}=\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}\frac{6}{61}$

85. $4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{70}+\tan^{-1}\frac{1}{99}=\frac{\pi}{4}$

86. $\cot\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right)=\sin\left(\cot^{-1}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$

87. $\tan\left(\cos^{-1}\frac{21}{29}\right)=\cos\left(\cot^{-1}\frac{20}{\sqrt{41}}\right)$

88. $\cos\left(\sin^{-1}\frac{12}{13}\right)=\sin\left(\sec^{-1}\frac{13}{12}\right)$

89. $\cos(\tan^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

90. $\tan(\cos^{-1}x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

91. $\sin(2\sin^{-1}x)=2x\sqrt{1-x^2}$

92. $\cos^{-1}\frac{a-x}{a+x}=2\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}$

93. $\cos^{-1}\sqrt{\frac{a-x}{a-b}}=\sin^{-1}\sqrt{\frac{x-b}{a-b}}$

$$=\cot^{-1}\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}$$

94. $\tan\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right]=\frac{x+y}{1-xy}$

95. $2\cos^{-1}\sqrt{\frac{a-x}{a-b}}=\sin^{-1}\frac{2\sqrt{(a-x)(x-b)}}{a-b}$

96. $\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right]=\frac{1}{2}\tan^{-1}x$

97. $\tan(2\tan^{-1}x)=2\tan[\tan^{-1}x+\tan^{-1}x^3]$

98. $\frac{1}{2}\tan^{-1}x=\cos^{-1}\left[\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}\right]^{\frac{1}{2}}$

99. $\sin\left[\cot^{-1}\left\{\cos(\tan^{-1}x)\right\}\right]=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}$

100. $\cos\left[\tan^{-1}\left\{\sin(\cot^{-1}x)\right\}\right] = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2+2}}$

101. $[\cos(\sin^{-1}x)]^2 = [\sin(\cos^{-1}x)]^2$

102. $\sin[\cos^{-1}\{\tan(\sec^{-1}x)\}] = \sqrt{2-x^2}$

103. $\tan\left[\sin^{-1}\left\{\cot\left(\sec^{-1}\dfrac{1}{x}\right)\right\}\right] = \dfrac{x}{\sqrt{1-2x^2}}$

104. $\sin\left[\cos^{-1}\left[\sin\left[\cos^{-1}\left[\sin\{\cos^{-1}\sqrt{1-a^2}\}\right]\right]\right]\right] = a$

105. $2\tan^{-1}\left[\tan\dfrac{\alpha}{2}\cdot\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\beta}{2}\right)\right]$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha+\sin\beta}\right]$$

106. $2\tan^{-1}\left[\tan(45^\circ-\alpha)\cdot\tan\dfrac{\beta}{2}\right]$

$$= \cos^{-1}\left[\frac{\sin 2\alpha+\cos\beta}{1+\sin 2\alpha\cdot\cos\beta}\right]$$

107. $\tan^{-1}x = 2\tan^{-1}[\operatorname{cosec}(\tan^{-1}x) - \tan(\cot^{-1}x)]$

108. $\sin^{-1}x = 2\cos^{-1}y$ எனில், $x = 2y\sqrt{1-y^2}$ எனக் காட்டுக.

109. $\sin^{-1}\alpha + \sin^{-1}\beta + \sin^{-1}\gamma = \pi$ எனில்,
$\alpha\sqrt{1-\alpha^2} + \beta\sqrt{1-\beta^2} + \gamma\sqrt{1-\gamma^2} = 2\alpha\beta\gamma$ என்று காட்டுக.

110. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \pi$ எனில்,
$x+y+z = xyz$ என்று காட்டுக.

111. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \dfrac{\pi}{4}$ எனில்,
$x+y+z+xy+yz+zx = 1+xyz$ என நிறுவுக.

112. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \dfrac{\pi}{2}$ எனில்,
$xy+yz+zx = 1$ எனக் காட்டுக.

113. $\dfrac{1}{2}\sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2} + \dfrac{1}{2}\cos^{-1}\dfrac{1-y^2}{1+y^2} + \dfrac{1}{3}\tan^{-1}\dfrac{3z-z^3}{1-3z^2} =$
$5\pi$ எனில், $x+y+z = xyz$ என நிறுவுக.

114. $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ எனில்,

$$\tan^{-1}\frac{yz}{xr} + \tan^{-1}\frac{zx}{yr} + \tan^{-1}\frac{xy}{zr} = \frac{\pi}{2}$$

என நிறுவுக.

115. $y = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$ எனில்,

$x^2 = \sin 2y$ எனக் காட்டுக.

116. $\sin^{-1}\dfrac{x}{a} + \sin^{-1}\dfrac{y}{b} = \dfrac{\pi}{2}$ எனில்,

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ எனக் காட்டுக.

## பயிற்சி 2 (ஆ)

**பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க:**

1. $\tan^{-1} x = \cot^{-1} x$

2. $\sin^{-1} x = \cos^{-1} x$

3. $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = \dfrac{\pi}{6}$

4. $\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \dfrac{\pi}{4}$

5. $\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \dfrac{3\pi}{4}$

6. $\tan^{-1}(1-x) + \tan^{-1}(1+x) = \dfrac{\pi}{4}$

7. $\tan^{-1} x + \tan^{-1}\dfrac{3}{2}x = \dfrac{\pi}{4}$

8. $2\tan^{-1}\dfrac{1}{5} + \tan^{-1} x = \dfrac{\pi}{4}$

9. $\tan^{-1} x + 2\cot^{-1} x = \dfrac{2}{3}\pi$

10. $\sin^{-1} x + \sin^{-1} 2x = \dfrac{2}{3}\pi$

11. $\sin^{-1} x + \sin^{-1} 2x = \dfrac{\pi}{3}$

12. $\sin^{-1}\frac{5}{x}+\sin^{-1}\frac{12}{x}=\frac{\pi}{2}$

13. $\sin^{-1}x+\cos^{-1}2x=\frac{\pi}{6}$

14. $\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}+\tan^{-1}2x=\frac{\pi}{2}$

15. $\cos^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)+\tan^{-1}\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2\pi}{3}$

16. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}(1-x)=\cos^{-1}x$

17. $\sin^{-1}x-\cos^{-1}x=\sin^{-1}(3x-2)$

18. $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\cos^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\sin^{-1}\frac{1+x}{1+x^2}$

19. $\operatorname{cosec}^{-1}x=\operatorname{cosec}^{-1}a+\operatorname{cosec}^{-1}b$

20. $\sec^{-1}\frac{x}{a}-\sec^{-1}\frac{x}{b}=\sec^{-1}b-\sec^{-1}a$

21. $\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x}=\frac{1}{2}\tan^{-1}x$

22. $\cot(\sin^{-1}x)=\sin\left(\tan^{-1}\frac{2}{3}\right)$

23. $\sin\left(\cot^{-1}\frac{1}{2}\right)=\tan(\cos^{-1}x)$

24. $\sin 2[\cos^{-1}\{\cot(2\tan^{-1}x)\}]=0$

25. $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}=\alpha$

26. $\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2}+\sin^{-1}\frac{2b}{1+b^2}=2\tan^{-1}x$

27. $\cos^{-1}\frac{1-a^2}{1+a^2}-\cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2}=2\tan^{-1}x$

28. $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}4x=\tan^{-1}3.$

29. $\tan^{-1}(x+1)+\tan^{-1}(x-1)=\tan^{-1}\frac{8}{31}$

30. $\tan^{-1}\frac{x}{1+x}+\tan^{-1}\frac{x}{1-x}=\tan^{-1}2$

31. $\tan^{-1}\frac{x-1}{x+1}+\tan^{-1}\frac{2x-1}{2x+1}=\tan^{-1}\frac{23}{36}$

32. $\tan^{-1}\frac{1}{2x+1}+\tan^{-1}\frac{1}{4x+1}=\tan^{-1}\frac{2}{x^2}$

33. $\tan^{-1}\sqrt{2}(x+1)-\tan^{-1}\frac{x-1}{\sqrt{2}}=\cot^{-1}4\sqrt{2}$

34. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}(1-x)=2\tan^{-1}\sqrt{x-x^2}$

35. $\tan^{-1}(x+1)+\cot^{-1}(x-1)=\sin^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{3}{5}$

36. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x=\pi$

37. $\tan^{-1}\frac{x}{a}+\tan^{-1}\frac{x}{b}+\tan^{-1}\frac{x}{c}=\frac{\pi}{2}$

38. $\tan^{-1}(x-1)+\tan^{-1}x+\tan^{-1}(x+1)=\tan^{-1}3x$

39. $\tan^{-1}\frac{a}{x}+\tan^{-1}\frac{b}{x}+\tan^{-1}\frac{c}{x}+\tan^{-1}\frac{d}{x}=\frac{\pi}{2}$

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க:

40. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\frac{2}{3}\pi$

$$x+y=\frac{3}{2}$$

41. $\cos^{-1}y-\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

$$2x-y=1$$

## விடைகள்

பயிற்சி 2 (ஆ)

1. $x=\pm 1$
2. $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$
3. $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $x=-1;\ \frac{1}{6}$
5. $x=1;\ -\frac{1}{6}$

6. $x = \pm \sqrt{2}$
7. $x = \frac{1}{3}$
8. $x = \frac{7}{17}$
9. $x = \sqrt{3}$
10. $x = \frac{1}{2}$
11. $x = \pm \dfrac{\sqrt{21}}{14}$
12. $x = 13$
13. $x = \pm \frac{1}{2}$
14. $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
15. $x = \sqrt{3}\,;\ 2 - \sqrt{3}$
16. $x = 0;\ \frac{1}{2}$
17. $x = 1;\ \frac{1}{2}$
18. $x = 2;\ -1$
19. $x = \dfrac{ab\left[\sqrt{a^2 - 1} - \sqrt{b^2 - 1}\right]}{a^2 - b^2}$
20. $x = ab$
21. $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
22. $x = \sqrt{\dfrac{13}{17}}$
23. $x = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$
24. $x = \pm 1;\ -1 \pm \sqrt{2};\ 1 \pm \sqrt{2}.$
25. $x = \pm \sqrt{\sin 2\alpha}$
26. $x = \dfrac{a + b}{1 - ab}$
27. $x = \dfrac{a - b}{1 + ab}$
28. $x = \frac{1}{4};\ -\frac{1}{2}$

29. $x = \frac{1}{4};\ -8$

30. $x = \frac{1}{2}$

31. $x = \frac{4}{3};\ -\frac{3}{8}$

32. $x = 3;\ -\frac{2}{3}$

33. $x = 6;\ -2$

34. $x = \frac{1}{2}$

35. $x = \pm\sqrt{\frac{48}{7}}$

36. $x = \pm 1$

37. $x = \pm\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$

38. $x = 0;\ \pm\frac{1}{2}$

39. $x^4 - x^2(cb + ac + ad + bc + bd + ad) + abcd = 0$
என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்.

40. $x = 1$
$y = \frac{1}{2}$

41. $x = 0$
$y = -1$

# 3. சிக்கல் எண்கள்

## [Complex Numbers]

### 3.1. கற்பனை எண் (Imaginary Number)

விகிதமுறு எண்கள் (Rational Numbers), விகிதமுரு எண்கள் (Irrational Numbers) அடங்கிய தொகுதிக்கு (System), மெய் எண் தொகுதி (Real Number System) என்பது பெயர். இதில் உள்ள எந்த எண்ணும் $x^2 = -1$ என்ற சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வாகாது. எனவே, எண் தொகுதியை விரிவு படுத்த வேண்டிய தேவை ஏற்பட்டது. இத்தேவையை நிறைவு செய்ய, சுவிட்சர்லாந்தின் கணித மேதை **ஆய்லர்** [Euler : 1707 - 1783] இயற் கணிதத்தின் (Algebra) அடிப்படை விதிகளுக்கு முரண்படாத $\sqrt{-1}$ என்ற புதிய எண்ணைக் கண்டு பிடித்தார். இந்த எண் கற்பனை அலகு (Imaginary Unit) என அழைக்கப்படுகிறது. $\sqrt{-1}$ ஐ $i$ என்று குறித்த பெருமை ஆய்லரையே சாரும். $i^2 = -1$ என்பது $i$-ன் தலையாய தன்மை (Property) ஆகும். $i$-ன் துணையால், $x^2 = -1$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு, $x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$ என்பவை தீர்வுகள் ஆகின்றன. ஆய்லரின் இச்சாதனை கணித வரலாற்றில் பொன் எழுத்துகளால் பொறிக்க வேண்டிய நிகழ்ச்சியாகும். $y$ ஒரு மெய் எண் எனில், $yi$ என்பது ஒரு கற்பனை எண் (Imaginary Number) என அழைக்கப்படுகிறது.

### 3.2. சிக்கல் எண் (Complex Number)

$x, y$ என்பவை மெய் எண்கள் எனில், $z = x + iy$ என்ற எண்ணுக்குச் சிக்கல் எண் (Complex Number) என்பது பெயர். $y = 0$ எனில், $z (= x)$ முழுவதுமே மெய் எண் (Purely Real Number) ஆகிறது ; $x = 0$ எனில், $z (= iy)$ முழுவதுமே கற்பனை எண் (Purely Imaginary Number) ஆகிறது. எனவே, $x$ என்பது

$z$-ன் மெய்ப் பகுதி (Real Part) என்றும், $y$ என்பது $z$-ன் கற்பனைப் பகுதி (Imaginary Part) என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன ; இவைகள் இரண்டும் முறையே

$x =$ மெ $(z)$,

$y =$ க $(z)$ என்று குறிக்கப்படுகின்றன.

**குறிப்பு :**

$x = 0 = y$ எனில், $z = 0$

### 3.3. சிக்கல் எண்களின் சமன்மை (Equality of Complex Numbers)

$x_1 = x_2, y_1 = y_2$ என இருந்தால் தான்,

$x_1 + i y_1$, $x_2 + i y_2$ என்ற சிக்கல் எண்கள் இரண்டும் சமம் என்று சொல்லப்படுகின்றன. அப்படி இருக்கும்போது

$$x_1 + i y_1 = x_2 + i y_2$$

என்று எழுதுகிறோம்.

எனவே, இரண்டு சிக்கல் எண்கள் சமமாக இருக்க வேண்டுமென்றால், ஒன்றன் மெய்ப் பகுதி மற்றதன் மெய்ப் பகுதிக்கும், ஒன்றன் கற்பனைப் பகுதி மற்றதன் கற்பனைப் பகுதிக்கும் சமமாக இருந்தாக வேண்டும்.

**குறிப்பு :**

1. $z = x + i y = 0$ எனில், $x = 0 = y$

2. சிக்கல் எண்களுள் சிறியவை, பெரியவை என்ற வரிசை (Order) கிடையாது. இரண்டு சிக்கல் எண்கள் கொடுக்கப்பட்டால், அவை இரண்டும் சமமாக இருக்கின்றன அல்லது ஒன்று மற்றதற்குச் சமம் அல்ல.

### 3.4. சிக்கல் எண்களின் இயற் கணிதம் (Algebra of Complex Numbers)

$z_1 = x_1 + i y_1$, $z_2 = x_2 + i y_2$ என இருக்கட்டும்.

#### 3-4.1. கூட்டல் (Addition)

$x_1 + x_2 + i (y_1 + y_2)$ என்ற சிக்கல் எண் $z_1 = x_1 + i y_1$, $z_2 = x_2 + i y_2$ என்ற சிக்கல் எண்களின் கூட்டுத்தொகை (Sum)

என்று வரையறுக்கப்படுகிறது. இதை $z_1 + z_2$ என்று எழுதுகிறோம். எனவே,

$$z_1 + z_2 = (x_1 + i y_1) + (x_2 + i y_2)$$
$$= (x_1 + x_2) + i (y_1 + y_2) \qquad (40)$$

### 3-4.2. கழித்தல் (Subtraction)

$$z_1 - z_2 = (x_1 + i y_1) - (x_2 + i y_2)$$
$$= (x_1 - x_2) + i (y_1 - y_2) \qquad (41)$$

என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

### 3-4.3. பெருக்கல் (Multiplication)

$x_1 x_2 - y_1 y_2 + i (x_1 y_2 + x_2 yi)$ என்ற சிக்கல் எண் $z_1 = x_1 + i y_1, z_2 = x_2 + i y_2$ என்ற சிக்கல் எண்களின் பெருக்குத் தொகை (Product) என்று வரையறுக்கப்படுகிறது. இதை $z_1 z_2$ என்று எழுதுகிறோம். எனவே,

$$z_1 z_2 = (x_1 + i y_1) (x_2 + i y_2)$$
$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i (x_1 y_2 + x_2 y_1) \qquad (42)$$

### 3-4.4. வகுத்தல் (Division)

$z_2 \neq 0$, $z_3 = x_3 + iy_3$, $z_1 = z_2 z_3$ எனில், $z_3$ என்ற சிக்கல் எண்ணானது, $z_1$ ஐ $z_2$ ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் ஈவு என வரையறுக்கப்படும்.

இந்த ஈவை $\frac{z_1}{z_2}$ எனக் குறிக்கிறோம்.

வரையறையின் படி,

$$z_1 = z_2 z_3$$

அ - து, $x_1 + iy_1 = (x_2 + iy_2) (x_3 + iy_3)$
$$= (x_2 x_3 - y_2 y_3 + i (x_2 y_3 + x_3 y_2)$$

[சூத்திரம் (42)-ன் படி]

$\therefore \quad x_1 = x_2 x_3 - y_2 y_3, \quad y_1 = x_2 y_3 + x_3 y_2.$ [3.3.-ன் படி]

இந்த இரு சமன்பாடுகளையும் $x_3$, $y_3$ க்குத் தீர்க்க (solving for $x_3$ and $y_3$),

$$x_3 = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y_3 = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\therefore \quad \frac{z_1}{z_2} = z_3$$
$$= x_3 + iy_3$$
$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \tag{43}$$

**குறிப்பு :**

1. $i^2$ வருமிடத்தில் எல்லாம் $-1$ என்று போட்டோமானால், மெய் இயற் கணித அடிப்படைச் செய்கைகளின் (Fundamental Operations of Real Algebra) மூலம் (40), (41), (42), (43) என்ற நான்கு முடிவுகளையும் அடையலாம்.

சான்றாக,

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$
$$= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1 + i^2 y_1 y_2$$
$$= x_1 x_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) - y_1 y_2$$
$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

2. மெய் இயற் கணிதத்தில் $a.a.a.........n$ காரணிகள் கொண்ட பெருக்குத் தொகையை $a^n$ என்று குறிப்பதுபோல், $z = x + iy$, $n$ ஒரு நேர் முழு எண் எனில், $z.z.z.........n$ காரணிகள் கொண்ட பெருக்குத் தொகையை $z^n$ என்று குறிக்கிறோம். $\frac{1}{z^n}$ ஐ $z^{-n}$ என்று எழுதுகிறோம்.

## 3.5. இணைச் சிக்கல் எண்கள் (Conjugate Complex Numbers)

$x, y$ என்பவை மெய் எண்கள் எனில்,

$x + iy$, $x - iy$ என்ற சிக்கல் எண்கள் இரண்டும் இணைச் சிக்கல் எண்கள் (Conjugate Complex Numbers) என அழைக்கப் படுகின்றன. ஒன்று மற்றதன் இணைச் சிக்கல் எண் ஆகும். $x + iy$ ஐ $z$ என்று குறித்தோமானால், $x - iy$ ஐ $\bar{z}$ என்று குறிப்பது வழக்கம்.

அதாவது, $z = x + iy$ எனில், $\bar{z} = x - iy$.

இப்பொழுது,

$$z + \bar{z} = 2x = 2 \text{ மெ} (z) \tag{44}$$

அதாவது, $z + \bar{z}$ என்பது முழுவதும் மெய் எண் ஆகும்.

$$z - \bar{z} = 2\,iy = 2\,i \text{ க} (z) \tag{45}$$

அதாவது, $z - \bar{z}$ என்பது முழுவதும் கற்பனை எண் ஆகும்.

$$z\bar{z} = x^2 - i^2 y^2$$
$$= x^2 + y^2 \tag{46}$$

$\bar{z} \neq 0$ எனில், சூத்திரம் (43)-ன் படி,

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i \frac{2xy}{x^2 + y^2} \tag{47}$$

$$\overline{(\bar{z})} = \overline{(x - iy)} = x + iy = z \tag{48}$$

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ எனில்,

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{[x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)]}$$ [சூத்திரம் (40)-ன் படி]

$$= x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2)$$
$$= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2)$$
$$= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \tag{49}$$

இது மாதிரியே,

$$\overline{(z_1 - z_2)} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \tag{50}$$

என நிரூபிக்கலாம்.

$$\overline{(z_1 z_2)} = \overline{[(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)]}$$

[சூத்திரம் (42)-ன் படி]

$$= x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$
$$= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2)$$
$$= \bar{z}_1 . \bar{z}_2 \tag{51}$$

இது மாதிரியே, $z_2 \neq 0$ எனில்,

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \tag{52}$$

என்று நிறுவ முடியும்.

**குறிப்பு :**

$z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots, z_n$ என்பவை $n$ சிக்கல் எண்கள் எனில்,

$$\overline{(z_1 + z_2 + z_3 + \ldots\ldots + z_n)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 + \ldots\ldots + \bar{z}_n \tag{53}$$

$$\overline{(z_1 z_2 z_3 \ldots\ldots\ldots\ldots z_n)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 \ldots\ldots\ldots\ldots \bar{z}_n \tag{54}$$

**3.6. சிக்கல் எண்ணின் மட்டும் வீச்சும் (வீச்சமும்)** (Modulus and Amplitude of a complex number)

$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ என இருக்கட்டும்.

3·3.-ன் படி, மெய், கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த (Equating real and imaginary parts),

$$x = r\cos\theta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

$$y = r\sin\theta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(ii)}$$

(i) ஐயும் (ii) ஐயும் வர்க்கப்படுத்திக் கூட்ட [Squaring (i) and (ii) and adding],

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\therefore \quad r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

$r$-னுடைய இரு மதிப்புகளில், நேர் மதிப்பை (Positive value) மட்டும் ஏற்றுக்கொள்வது மரபு. எனவே,

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(iii)}$$

$x$, $y$ என்பவை எந்த மெய் எண்களாக இருந்தாலும், $r$ க்கு ஒரே ஒரு மதிப்புதான் உண்டு. அதாவது, $r$ ஓர் ஒரு மதிப்புடைச் சார்பு (A single valued function) ஆகும். $r$ ஆனது $z$-ன் மட்டு (Modulus of $z$) என அழைக்கப்படுகிறது. இதை $|z|$ என்று குறிப்பது வழக்கம். ஆகவே,

$$r = |z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (55)$$

(i), (ii), (iii)-லிருந்து,

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad (56)$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad (57)$$

(56)-க்கும், (57)-க்கும் பொருந்துகின்ற $\theta$க்கு $z$-ன் வீச்சு (அல்லது $z$-ன் வீச்சம்) (Amplitude or Argument of $z$) என்பது பெயர். இதை

$\theta =$ வீச்சு $z$ என எழுதுகிறோம்.

$\theta$ க்கு எண்ணற்ற மதிப்புகள் (Infinite number of values) உண்டு என்பது வெளிப்படை. $\theta$-ன் எந்த இரு மதிப்புகளுக்கும் இடையே உள்ள வேறுபாடு (Difference) $2\pi$-ன் மடங்காகும் (Multiple of $2\pi$). $\theta$-ன் பல மதிப்புகளுக்குள்,

$-\pi <$ வீச்சு $z \leqslant \pi$

என்ற நிபந்தனைக்குப் பொருந்தும் மதிப்புக்கு வீச்சு $z$-ன் முதன்

மதிப்பு (Principal value of the Amplitude of $z$) என்பது பெயர். வீச்சு $z$-ன் முதன் மதிப்பு $\alpha$ எனில், வீச்சு $z$-ன் பொது மதிப்பு (General value of the Amplitude of $z$) $= 2n\pi + \alpha$; $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம். பொதுவாக, ஒரு சிக்கல் எண்ணின் வீச்சு என்று சொல்லும்போது, அதன் முதன் மதிப்பையே கருத்தில் கொள்கிறோம். ஒரு சிக்கல் எண்ணின் மட்டு $r$, வீச்சு ஆனது $\theta$ எனில், அந்த எண்ணை $(r, \theta)$ என்று குறிப்பது வழக்கம்.

**குறிப்பு :**

1. $|z|^2 = r^2 = x^2 + y^2$ (58)
2. $z = 0$ எனில், அதாவது $x = 0 = y$ எனில், $|z| = 0$
3. $|z| = 0$ எனில், $x = 0 = y$. அதாவது, $z = 0$
4. $|-z| = |-x - iy| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2}$
   $= \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ (59)
5. $|\bar{z}| = |x - iy| = \sqrt{x^2 + (-y)^2}$
   $= \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ (60)
6. $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2$ (61)
7. $\bar{z} = x - iy = r(\cos\theta - i\sin\theta)$ (62)
8. $\bar{z} = r[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$
   $\therefore$ வீச்சு $(\bar{z}) = -\theta$ (63)
9. வீச்சு $z = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$, $x > 0$ எனில்.
   $= \pi + \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$, $x < 0, y > 0$ எனில்.
   $= -\pi + \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$, $x < 0, y < 0$ எனில் (64)

   இங்கே $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.
10. $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
    $= r[\cos(2n\pi + \theta) + i\sin(2n\pi + \theta)]$, (65)

    $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.
11. $r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ எனில்
    $r_1 = r_2$, $\theta_1 = 2n\pi + \theta_2$. (66)

$n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

ஏனென்றால்,

$$r_1 \cos \theta_1 = r_2 \cos \theta_2$$
$$r_1 \sin \theta_1 = r_2 \sin \theta_2$$
$$\therefore r_1^2 \cos^2 \theta_1 + r_1^2 \sin^2 \theta_1 = r_2^2 \cos^2 \theta_2 + r_2^2 \sin^2 \theta_2$$

அ-து, $r_1^2 = r_2^2$

$$\therefore r_1 = r_2$$

$$\therefore \quad \cos \theta_1 = \cos \theta_2 , \; \sin \theta_1 = \sin \theta_2$$

$\therefore \quad \theta_1 = 2n\pi + \theta_2$ , $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

**3.7. $z_1$ , $z_2$ என்பவை இரு சிக்கல் எண்கள் எனில்,**

**(i) $| z_1 z_2 | = | z_1 | . | z_2 |$,**

**வீச்சு $(z_1 z_2)$ = வீச்சு $z_1$ + வீச்சு $z_2$ என்றும்**

**(ii) $z_2 \neq 0$ எனில்,**

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{| z_1 |}{| z_2 |},$$

**வீச்சு $\left( \dfrac{z_1}{z_2} \right)$ = வீச்சு $z_1$ − வீச்சு $z_2$ என்றும் நிறுவுதல்.**

**நிறுவல் :**

(i) $z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = (r_1 , \theta_1)$,

$z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = (r_2 , \theta_2)$ என இருக்கட்டும்.

எனவே, $| z_1 | = r_1$ , $| z_2 | = r_2$ ,

வீச்சு $z_1 = \theta_1$ , வீச்சு $z_2 = \theta_2$

இப்பொழுது,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [ (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) ]$$
$$= r_1 r_2 [ \cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2) ]$$
$$= [ r_1 r_2 , \theta_1 + \theta_2 ]$$

$\therefore | z_1 z_2 | = r_1 r_2 = | z_1 | . | z_2 |$ (67)

வீச்சு $(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2$ = வீச்சு $z_1$ + வீச்சு $z_2$ (68)

(ii) $z_2 \neq 0$ (கொள்கை)

$$\therefore \; |z_2| = r_2 \neq 0$$

இப்பொழுது,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}\right]$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

$$= \left[\frac{r_1}{r_2},\; \theta_1 - \theta_2\right]$$

$$\therefore \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad (69)$$

$$\text{வீச்சு}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \text{வீச்சு } z_1 - \text{வீச்சு } z_2 \qquad (70)$$

**துணை முடிவுகள் :**

1. $(r_1, \theta_1)$, $(r_2, \theta_2)$, ........., $(r_n, \theta_n)$ என்பவை $n$ சிக்கல் எண்கள் எனில்,

$$(r_1, \theta_1) \cdot (r_2, \theta_2) \ldots\ldots\ldots (r_n, \theta_n) = [r_1 \cdot r_2 \ldots\ldots\ldots r_n, (\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)] \ldots\ldots\ldots (71)$$

2. $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$ என்பவை $n$ சிக்கல் எண்கள் எனில்,

$$|z_1 z_2 \ldots\ldots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \ldots\ldots |z_n| \qquad (72)$$

$$\text{வீச்சு}(z_1 z_2 \ldots\ldots z_n) = \text{வீச்சு } z_1 + \text{வீச்சு } z_2 + \ldots\ldots + \text{வீச்சு } z_n \qquad (73)$$

3. $z$ ஒரு சிக்கல் எண், $n$ ஒரு நேர் முழு எண் எனில்

$$|z^n| = |z|^n \qquad (74)$$

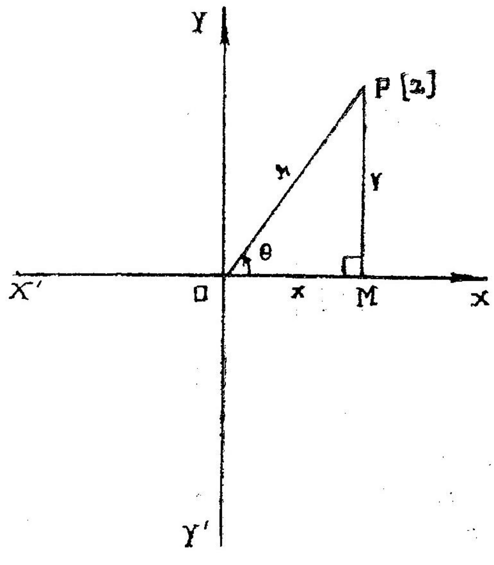
$$\text{வீச்சு } z^n = n \text{ வீச்சு } z \qquad (75)$$

**குறிப்பு :**

1. வீச்சுகள் சம்பந்தப்பட்ட முடிவுகளில், அவைகளின் மதிப்புகள் முதன் மதிப்புகளாக இருக்கவேண்டிய அவசியம் இல்லை.

2. $$\frac{(r_1, \theta_1)}{(r_2, \theta_2)} = \left[\frac{r_1}{r_2}, \ \theta_1 - \theta_2\right] \tag{76}$$

## 3.8. ஆர்கன் வரைபடம் (Argand Diagram)




படம் 5

ஒரு தளத்தில் (Plane) X'OX, Y'OY என்ற இரு செங்குத்து அச்சுகளை (Rectangular Axes) வரைந்தோமானுல்,

$z = x + iy$ என்ற சிக்கல் எண், $(x, y)$ ஆகியவற்றைக் கூறுகளாகக் (Co-ordinates) கொண்ட P $(x, y)$ என்ற புள்ளியால் குறிக்கப்படுகிறது (படம் 5). P-ன் இடம் (Position) $z$ ஐப் பொறுத்துள்ளதால், P-ன் இடத்தை $z$ என்ற மாறியின் (Argument) சார்பு (Function) எனக் குறிப்பிடலாம். இச் சார்பை P $(z)$ என்று குறிப்பது வழக்கம். மேற்கூறிய வரை கணித முறைப்படி (Geometrical Method) ஒவ்வொரு சிக்கல் எண்ணையும் குறிக்க

முடியும். இம் முறையை **ஆர்கன்** (Argand) என்பவர் கி.பி. 1806-ல் தெரிவித்தார். எனவே, வரை கணித முறையில் சிக்கல் எண்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளால் ஆன படத்திற்கு ஆர்கன் வரைபடம் (Argand Diagram) என்பது பெயர். அந்தப் புள்ளிகளைத் தாங்கியுள்ள தளம் ஆர்கன் தளம் (Argand Plane) என அழைக்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு சிக்கல் எண்ணுக்கும் ஒத்ததாக (Corresponding) ஒரே ஒரு (Unique) புள்ளி இருப்பது போல், ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் ஒத்ததாக ஒரே ஒரு சிக்கல் எண்தான் உண்டு. எனவே, சிக்கல் எண் தொகுதிக்கும் (Complex Number System), ஆர்கன் தளத்தில் உள்ள புள்ளிகளுக்கும் இடையே, 1-1 ஒத்தியைபு (Correspondence) உள்ளது.

$x$ அச்சில் உள்ள புள்ளிகள் மெய் எண்களையே (Real Numbers only) குறிக்கின்றன; $y$ அச்சில் உள்ள புள்ளிகள், முழுவதுமே கற்பனையான எண்களையே (Purely Imaginary Numbers only) குறிக்கின்றன. ஆகவே, $x$, $y$ அச்சுகள் முறையே மெய் அச்சு (Real Axis), கற்பனை அச்சு (Imaginary Axis) என்று அழைக்கப் படுகின்றன.

OP ஐச் சேர்த்தோமானால், $OP = r$, $\angle XOP = \theta$ என்பவை P ($z$)-ன் கோண தூரக் கூறுகள் (Polar Co-ordinates) ஆகும்.

அதாவது. $P(z) \equiv (r, \theta)$

இப்பொழுது, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. எனவே, $|z| = OP$, வீச்சு $z$ (வீச்சம் $z$) $= \angle XOP$.

ஆகவே, OP-ன் அளவும் திசையும் (Magnitude and Direction) தெரிந்தால், $z$ ஐக் குறிக்க முடியும் என்பது தெளிவாகிறது.

எனவே $z$ ஐ திசையி $\overrightarrow{OP}$ (Vector $\overrightarrow{OP}$) ஆலும் குறிக்கலாம்.

அதாவது,

$$z = \overrightarrow{OP}$$

$\overrightarrow{OP}$ க்குச் சமமாக ஆர்கன் தளத்தில் எண்ணற்ற திசையிகள் (Infinite Number of Vectors) உள்ளன. எனவே, அவைகள் ஒவ்வொன்றாலும் $z$ ஐக் குறிக்கலாம்.

**குறிப்பு :**

1. $y = 0, x > 0$ எனில், வீச்சு $z$ (வீச்சம் $z$) $= 0$ (77)

2. $y = 0, x < 0$ எனில், வீச்சு $z = \pi$ (78)

3. $x = 0, y > 0$ எனில், வீச்சு $z = \frac{\pi}{2}$ (79)

4. $x = 0, y < 0$ எனில், வீச்சு $z = -\frac{\pi}{2}$ (80)

5. ஒரு திசையி ஆனது ஒரு சிக்கல் எண்ணைக் குறித்தால், அதன் இறுதிப் புள்ளியும் (Terminal Point) அதே சிக்கல் எண்ணைக் குறிக்க வேண்டுமென்றால், அதன் தொடக்கப் புள்ளி (Initial Point) ஆனது ஆதியோடு (Origin) பொருந்தி இருக்கவேண்டும்.

## மாதிரிக் கணக்குகள்

**மாதிரிக் கணக்கு 3-9.1.**

$\frac{3}{4+3i} + \frac{i}{3-4i}$ என்ற எண்ணை $x + iy$ என்ற **வடிவத்தில்** (Form) **எழுதுக.**

$$\frac{3}{4+3i} = \frac{3(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{12-9i}{16+9} = \frac{12-9i}{25}$$

$$\frac{i}{3-4i} = \frac{i(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3i-4}{9+16} = \frac{3i-4}{25}$$

$$\therefore \quad \frac{3}{4+3i} + \frac{i}{3-4i} = \frac{12-9i+3i-4}{25}$$

$$= \frac{8-6i}{25}$$

$$= \frac{8}{25} + i\left(-\frac{6}{25}\right)$$

**மாதிரிக் கணக்கு 3-9·2.**

$z = \cos\theta + i\sin\theta$ எனில், $\frac{1+z}{1-z} = i\cot\frac{\theta}{2}$ **என நிறுவுக.**

(செ.ப. 1961 செ.)

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$$

$$= \frac{[1 + \cos\theta + i\sin\theta]}{[(1-\cos\theta) - i\sin\theta]}\,\frac{[1 - \cos\theta + i\sin\theta]}{[(1-\cos\theta) + i\sin\theta]}$$

$$= \frac{(1 + i\sin\theta)^2 - \cos^2\theta}{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}$$

$$= \frac{1 + 2i\sin\theta - \sin^2\theta - \cos^2\theta}{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

$$= \frac{2i\sin\theta}{2 - 2\cos\theta}$$

$$= \frac{i\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$$= \frac{i\ 2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\ \cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{i\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= i\cot\frac{\theta}{2}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 3-9·3.**

$\frac{2-i}{(1-2i)^2}$, $\frac{-(2+11i)}{25}$ என்பவை இணைச் சிக்கல் எண்கள் என நிறுவுக. (செ.ப. 1968 செ.)

$\frac{2-i}{(1-2i)^2} = z$ என்று எடுத்துக் கொண்டோமானால்,

$$z = \frac{2-i}{(1-2i)^2}$$

$$= \frac{2-i}{1-4i-4}$$

$$= \frac{2-i}{-3-4i}$$

$$= \frac{(i-2)}{(3+4i)}$$

$$= \frac{(i-2)\ (3-4i)}{(3+4i)\ (3-4i)}$$

$$= \frac{-2+11i}{25}$$

$$\therefore\ z = \frac{-2-11i}{25} = \frac{-(2+11i)}{25}$$

$\therefore\ \dfrac{2-i}{(1-2i)^2},\ \dfrac{-(2+11i)}{25}$ என்பவை இணைச் சிக்கல் எண்கள்.

**மாதிரிக் கணக்கு 3-9·4.**

**$\sqrt{x+iy} = A + iB$ எனில், $A^2 - B^2 = x$, $2AB = y$ என நிறுவுக. இந்த முடிவுகளைப் பயன்படுத்தி, $\sqrt{5+12i}$ ஐ $A + iB$ என்ற வடிவத்தில் $A > 0$ ஆக இருக்கும்படி எழுதுக.**

**பகுதி 1 :** $\sqrt{x+iy} = A + iB$ (கொள்கை)

$$\therefore\ (x+iy) = (A+iB)^2$$

$$= A^2 + B^2 - i\,2\,AB$$

மெய், கற்பனைப் பகுதிகளை முறையே சமப்படுத்த,

$$A^2 - B^2 = x,$$

$$2\,AB = y.$$

**பகுதி 2 :** $\sqrt{5+12\,i}$-ல், $x = 5$

$$y = 12$$

எனவே, $A^2 - B^2 = 5$ .................. (i)

$2\,AB = 12$ .................. (ii)

இப்பொழுது, $B = mA$ .................. (iii)

என எடுத்துக் கொள்வோம்.

B-ன் மதிப்பை (i)-ல் இட, $A^2 - m^2A^2 = 5$

அ-து, $A^2(1-m^2) = 5$ ......... (iv)

B-ன் மதிப்பை (ii)-ல் இட, $2m\,A^2 = 12$

அ-து, $m\,A^2 = 6$ ......... (v)

(iv), (v)-லிருந்து, $\dfrac{A^2(1-m^2)}{m\,A^2} = \dfrac{5}{6}$

அ - து, $\frac{1-m^2}{m} = \frac{5}{6}$

அ - து, $6m^2 + 5m - 6 = 0$

அ - து, $(2m+3)(3m-2) = 0$

$\therefore \quad m = -\frac{3}{2}$ அல்லது $\frac{2}{3}$.

(v)-ல் $m = -\frac{3}{2}$ என்று இட, $A^2 = -4$

$\therefore \quad A = \pm\sqrt{-4}$

எனவே, A ஒரு கற்பனை எண்ணாகிறது.

$\therefore \quad m = -\frac{3}{2}$ ஐ விட்டுவிட வேண்டும்.

(v)-ல் $m = \frac{2}{3}$ என்று இட, $A^2 = 9$

$\therefore \quad A = \pm 3$

ஆனால், $A > 0$ (கொள்கை)

$\therefore \quad A = 3.$

$A = 3, \quad m = \frac{2}{3}$ என்ற மதிப்புகளை (iii)-ல் இட,

$B = 2.$

$\therefore \quad \sqrt{5+12i} = A + iB = 3 + 2i$

**மாதிரிக் கணக்கு 3-9.5.**

**$z_1, z_2$ என்பவை இரு சிக்கல் எண்கள் எனில்,**
**$|z_1 + z_2|^2 = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)$ என நிறுவுக.**

$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)}$ [சூத்திரம் (61)-ன் படி]

$= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$ [சூத்திரம் (49)-ன் படி]

$= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)$

**குறிப்பு :**

$|z_1 - z_2|^2 = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)$

**மாதிரிக் கணக்கு 3-9.6.**

**$z_1, z_2$ என்பவை எவையேனும் இரண்டு சிக்கல் எண்கள் எனில்,**

(a) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$

(செ. ப. 1967 ஏ.)
(செ. ப. 1969 செ.)

(b) $2|z_1| + 2|z_2| = |z_1 + z_2 - 2\sqrt{z_1 z_2}| + |z_1 + z_2 + 2\sqrt{z_1 z_2}|$

என நிறுவுக. (செ. ப. 1969 செ.)

(a) $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $|z_1|^2 = x_1^2 + y_1^2$, $|z_2|^2 = x_2^2 + y_2^2$.

$$\begin{aligned}
&|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 \\
&= |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)|^2 + |(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)|^2 \\
&= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \\
&= (x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\
&= 2(x_1^2 + x_2^2) + 2(y_1^2 + y_2^2) \\
&= 2(x_1^2 + y_1^2) + 2(x_2^2 + y_2^2) \\
&= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)
\end{aligned}$$

(b) (i)-ல் $z_1$-க்குப் பதில் $\sqrt{z_1}$-ம், $z_2$-க்குப் பதில் $\sqrt{z_2}$-ம் இட,

$$|\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}|^2 + |\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2}|^2 = 2|\sqrt{z_1}|^2 + 2|\sqrt{z_2}|^2$$

$$\therefore |(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2})^2| + |(\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2})^2| = 2|(\sqrt{z_1})^2| + 2|(\sqrt{z_2})^2|$$

[சூத்திரம் (74)-ன் படி]

அ-து, $|z_1 + z_2 - 2\sqrt{z_1 z_2}| + |z_1 + z_2 + 2\sqrt{z_1 z_2}| = 2|z_1| + 2|z_2|$

**மாதிரிக் கணக்கு 3-9.7.**

**பின் வரும் எண்களை $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ என்ற வடிவத்தில் (Form) எழுதுக. ஒவ்வோர் எண்ணினுடைய வீச்சின் (வீச்சத்தின்) பொது மதிப்பையும் எழுதுக.**

| | |
|---|---|
| (i) $\sqrt{3} + i$ | (ii) $1 - i$ |
| (iii) $-3 + 4i$ | (iv) $-12 - 5i$ |
| (v) $1$ | (vi) $-1$ |
| (vii) $i$ | (viii) $-i$ |
| (ix) $1 + i\cot\alpha$ | (x) $1 + \sin\alpha + i\cos\alpha$ |

(i) $\sqrt{3} + i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ எனில்.

$r\cos\theta = \sqrt{3}$, $\qquad r\sin\theta = 1$

$$\therefore \quad r^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$$

$$\therefore \quad r = 2$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$(\sqrt{3} + i)$-ன் வீச்சின் பொது மதிப்பு $= 2n\pi + \frac{\pi}{6}$, $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

(ii) $1 - i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ எனில்,

$r\cos\theta = 1, \qquad r\sin\theta = -1$

$$\therefore \quad r^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2$$

$$\therefore \quad r = \sqrt{2}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore 1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$(1 - i)$-ன் வீச்சின் பொது மதிப்பு $= 2n\pi - \frac{\pi}{4}$

(iii) $-3 + 4i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ எனில்,

$r\cos\theta = -3, \qquad r\sin\theta = 4$

$$\therefore \quad r^2 = (-3)^2 + 4^2 = 25$$

$$\therefore \quad r = 5$$

$$\therefore \cos\theta = -\frac{3}{5} \qquad \sin\theta = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \quad \theta = 126^\circ\, 52'$$

$$\therefore -3 + 4i = 5\,[\cos 126^\circ\, 52' + i\sin 126^\circ\, 52']$$

$(-3 + 4i)$-ன் வீச்சின் பொது மதிப்பு $= n.\,360^\circ + 126^\circ\, 52'$

(iv) $-12-5i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ எனில்,

$$r\cos\theta = -12, \qquad r\sin\theta = -5$$

$$\therefore \quad r^2 = (-12)^2 + (-5)^2 = 169$$

$$\therefore \quad r = 13.$$

$$\therefore \quad \cos\theta = -\frac{12}{13}, \qquad \sin\theta = -\frac{5}{13}$$

$$\therefore \quad \theta = -157^\circ\ 23'$$

$$\therefore \quad -12-5i = 13\,[\cos(-157^\circ\ 23') + i\sin(-157^\circ\ 23')]$$

$(-12-5i)$-ன் வீச்சின் பொது மதிப்பு $= n\,.\,360^\circ - 157^\circ\ 23'$

(v) $1 = 1 + i0 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ எனில்,

$$r\cos\theta = 1, \qquad r\sin\theta = 0$$

$$\therefore \quad r^2 = 1^2 + 0^2 = 1$$

$$\therefore \quad r = 1$$

$$\therefore \quad \cos\theta = 1, \qquad \sin\theta = 0$$

$$\therefore \quad \theta = 0$$

$$\therefore \quad 1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$$

1-ன் வீச்சின் பொது மதிப்பு $= 2n\pi + 0$

$= 2n\pi$

(vi) $-1 = -1 + i0 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ எனில்,

$$r\cos\theta = -1, \qquad r\sin\theta = 0$$

$$\therefore \quad r^2 = (-1)^2 + 0^2 = 1$$

$$\therefore \quad r = 1$$

$$\therefore \quad \cos\theta = -1, \qquad \sin\theta = 0$$

$$\therefore \quad \theta = \pi$$

$$\therefore \quad -1 = 1\,[\cos\pi + i\sin\pi]$$

$-$ 1-ன் வீச்சின் பொது மதிப்பு $= 2n\pi + \pi$

$= (2n+1)\pi$

(vii) $i = 0 + i\,.\,1 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ எனில்,

$$r\cos\theta = 0, \qquad r\sin\theta = 1$$

$$\therefore \quad r^2 = 0^2 + 1^2 = 1$$

$\therefore \quad r = 1$

$\therefore \quad \cos\theta = 0, \qquad \sin\theta = 1$

$$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad i = 1\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]$$

$i$-ன் வீச்சின் பொது மதிப்பு $= 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$

(viii) $-i = 0 + i(-1) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ எனில்,

$r\cos\theta = 0, \qquad r\sin\theta = -1$

$\therefore \quad r^2 = 0^2 + (-1)^2 = 1$

$\therefore \quad r = 1$

$\therefore \quad \cos\theta = 0, \qquad \sin\theta = -1$

$$\therefore \quad \theta = -\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad -i = 1\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$-i$-ன் வீச்சின் பொது மதிப்பு $= 2n\pi - \dfrac{\pi}{2}$.

(ix) $1 + i\cot\alpha = 1 + i\,\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$$= \frac{1}{\sin\alpha}\,[\sin\alpha + i\cos\alpha]$$

$$= \operatorname{cosec}\alpha\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right]$$

$(1 + i\cot\alpha)$-ன் வீச்சின் பொது மதிப்பு $= 2n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \alpha$

(x) $1 + \sin\alpha + i\cos\alpha$

$$= 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + i\,2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\cdot$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right.$$
$$\left.+ i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

$(1 + \sin\alpha + i\cos\alpha)$-ன் வீச்சின் பொது மதிப்பு

$$= 2n\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 3-9.8.**

$\dfrac{3}{2+\cos\theta+i\sin\theta}$ **என்ற எண்ணின் மட்டையும், வீச்சையும் (வீச்சத்தையும்) காண்க.** (செ. ப. 1966 ஏ.)

கொடுக்கப்பட்ட எண்ணை $z$ என்று குறித்தால்,

$$z = \frac{3(2+\cos\theta-i\sin\theta)}{(2+\cos\theta+i\sin\theta)(2+\cos\theta-i\sin\theta)}$$

$$= \frac{3(2+\cos\theta)-3i\sin\theta}{(2+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}$$

$$= \frac{3(2+\cos\theta)-3i\sin\theta}{5+4\cos\theta}$$

$= x + iy$ என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $x = \dfrac{3(2+\cos\theta)}{5+4\cos\theta} > 0,\ y = \dfrac{-3\sin\theta}{5+4\cos\theta}$

$$\therefore\quad x^2+y^2 = \frac{9(2+\cos\theta)^2+9\sin^2\theta}{(5+4\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{9(5+4\cos\theta)}{(5+4\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{9}{5+4\cos\theta}$$

இப்பொழுது, $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \dfrac{3}{\sqrt{5+4\cos\theta}}$

வீச்சு $(z) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ [சூத்திரம் (64)-ன் படி.]

$$= \tan^{-1}\left[\frac{-3\sin\theta}{3(2+\cos\theta)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{-\sin\theta}{2+\cos\theta}\right]$$

**மாதிரிக் கணக்கு 3-9.9.**

$(-3+4i)(5+2i)$**-ன் மட்டையும் வீச்சையும் (வீச்சத்தை யும்) காண்க.**

$(-3+4i)(5+2i) = -23 + 14i = x + iy$ என இருக்கட்டும்.

கொடுக்கப்பட்ட எண்ணின் மட்டு $= \sqrt{x^2+y^2}$

$$= \sqrt{(-23)^2+14^2}$$

$$= \sqrt{529+196}$$

$$= \sqrt{725}$$

$$= \sqrt{25\times 29}$$

$$= 5\sqrt{29}$$

$x = -23 < 0, y = 14 > 0.$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட எண்ணின் வீச்சு (வீச்சம்)

$$= \pi + \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad \text{[சூத்திரம் (64)-ன் படி]}$$

$$= \pi + \tan^{-1}\left(\frac{14}{-23}\right)$$

$$= \pi - \tan^{-1}\frac{14}{23} \qquad \text{[சூத்திரம் (23)-ன் படி]}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 3-9.10.**

$(1+i)\ (3+4i)$ **ஐ மட்டு - வீச்சு வடிவத்தில்** (Modulus-Amplitude Form) **எழுதுக.** (செ. ப. 1951 மா.)

$1+i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ எனில்,

$r\cos\theta = 1, \qquad r\sin\theta = 1$

$\therefore\ r^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

$\therefore\ r = \sqrt{2}$

$$\therefore \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore 1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

$3 + 4i = P(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ எனில்,

$P\cos\alpha = 3, \qquad P\sin\alpha = 4$

$\therefore \quad P^2 = 3^2 + 4^2 = 25$

$\therefore \quad P = 5$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{3}{5}, \qquad \sin\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \tan\alpha = \frac{3}{4}$$

அ-து, $\qquad \alpha = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

$$\therefore 3 + 4i = 5\,[\cos\alpha + i\sin\alpha] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

(i), (ii) லிருந்து,

$$(1 + i)(3 + 4i) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).\ 5(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$= 5\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right]$$

[சூத்திரம் (71)-ன் படி]

**மாதிரிக் கணக்கு 3-9.11.**

$\theta, \phi$ **என்பவை குறுங்கோணங்கள்,** $2\tan\theta = 3\tan\phi = 1$ **எனில்;** $(2 + i)(3 + i) = 5(1 + i)$ **என்ற உண்மையைப் பயன்படுத்தி.**

$\theta + \phi = 45^\circ$ **என நிறுவுக.**

(செ. ப. 1967 செ.)

கொள்கைப்படி, $\theta$ ஒரு குறுங்கோணம்: $\tan\theta = \frac{1}{2}$

$$\therefore \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\therefore \sqrt{5}(\cos\theta + i\sin\theta) = 2 + i \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

கொள்கைப்படி, $\phi$ ஒரு குறுங்கோணம்; $\tan\phi = \frac{1}{3}$.

$$\therefore \cos\phi = \frac{3}{\sqrt{10}}, \qquad \sin\phi = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \sqrt{10}(\cos\phi + i\sin\phi) = 3 + i \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

3.9.11.-ல் செய்தபடி,

$$\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) = 1 + i \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(iii)}$$

$(2 + i)(3 + i) = 5(1 + i)$ என்பது உண்மை.

எனவே, (i), (ii), (iii) லிருந்து,

$$\sqrt{5}(\cos\theta + i\sin\theta)\sqrt{10}(\cos\phi + i\sin\phi)$$
$$= 5\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$$

$$\therefore \sqrt{50}\,[\cos(\theta + \phi) + i\sin(\theta + \phi)]$$
$$= \sqrt{50}\,(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) \qquad \text{(சூத்திரம் (71)-ன் படி]}$$

$$\therefore \theta + \phi = 45^\circ$$

**மாதிரிக் கணக்கு 3-9.12.**

**ஆர்கன் வரைபடத்தில், A ($z_1$), B ($z_2$), C ($z_3$) என்ற புள்ளிகள் ஆதியை (Origin) நடுக்கோட்டுச் சந்தியாகக் (Centroid) கொண்ட ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகளானால்,**

$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2$ **என நிறுவுக.**

(செ. ப. 1946 மா.)

$z_1 = (r, \theta)$ என இருக்கட்டும்.

கொள்கைப்படி, ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணம். O (ஆதி) அதன் நடுக்கோட்டுச் சந்தி.

$$\therefore \quad z_2 = \left(r, \theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z_3 = \left(r, \theta + \frac{4\pi}{3}\right)$$

சூத்திரம் (71)-ன் படி,

$$z_1^2 = (r^2, 2\theta) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

$$z_2^2 = \left(r^2, 2\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

$$z_3^2 = \left(r^2, 2\theta + \frac{8\pi}{3}\right)$$

$$= \left(r^2, 2\theta + 2\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \left(r^2, 2\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(iii)$$

$$z_2 z_3 = (r^2, 2\theta + 2\pi)$$

$$= (r^2, 2\theta)$$

$$= z_1^2 \quad [\text{(i)-லிருந்து}]$$

$$z_3 z_1 = \left(r^2, 2\theta + \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= z_2^2 \quad [\text{(ii)-லிருந்து}]$$

$$z_1 z_2 = \left(r^2, 2\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= z_3^2 \quad [\text{(iii)-லிருந்து}]$$

$$\therefore \; z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$$

**மாதிரிக் கணக்கு 3-9.13.**

$|z_1| = |z_2|$, **வீச்சு** $z_1 +$ **வீச்சு** $z_2 = 0$ **எனில்,** $z_1, z_2$ **என்பவை இணைச் சிக்கல் எண்கள் என நிறுவுக.**

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

என இருக்கட்டும்.

இப்போது, $|z_1| = r_1$, $|z_2| = r_2$,

வீச்சு $z_1 = \theta_1$, வீச்சு $z_2 = \theta_2$.

$$\bar{z}_1 = r_1(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)$$

கொள்கைப்படி, $|z_2| = |z_1|$

$$\therefore \; r_2 = r_1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(iii)$$

$$\text{வீச்சு } z_1 + \text{வீச்சு } z_2 = 0 \quad (\text{கொள்கை})$$

அ-து, $\theta_1 + \theta_2 = 0$

$$\therefore \quad \theta_2 = -\theta_1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(iv)$$

(ii), (iii), (iv)-லிருந்து

$$z_2 = r_1 [\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1)]$$
$$= r_1 (\cos\theta_1 - i \sin\theta_1)$$
$$= \bar{z}_1$$

$\therefore$ $z_2$ என்பது $z_1$-ன் இணைச் சிக்கல் எண்.

**மாதிரிக் கணக்கு 3-9.14.**

$(a_1 + i b_1)\ (a_2 + i b_2)\ldots\ldots\ldots\ldots(a_n + i b_n) = A + iB$ **எனில்,** $(a_1^2 + b_1^2)\ (a_2^2 + b_2^2)\ldots\ldots\ldots\ldots(a_n^2 + b_n^2) = A^2 + B^2$ **என்றும்,** $\tan^{-1}\dfrac{b_1}{a_1} + \tan^{-1}\dfrac{b_2}{a_2} + \ldots\ldots + \tan^{-1}\dfrac{b_n}{a_n} = \tan^{-1}\dfrac{B}{A}$ **என்றும் நிறுவுக.**

(செ. ப. 1950 மா.)
(செ. ப. 1959 மா.)
(செ. ப. 1967 ஏ.)

$A + iB = (a_1 + ib_1)\ (a_2 + ib_2)\ldots\ldots(a_n + ib_n)$ (கொள்கை)

எனவே, சூத்திரம் (72)-ன் படி,

$$|A + iB| = |a_1 + ib_1| \cdot |a_2 + ib_2| \ldots\ldots |a_n + ib_n|$$

அ-து, $\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \ldots\ldots \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

$$\therefore \quad A^2 + B^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)\ldots\ldots(a_n^2 + b_n^2)$$

சூத்திரம் (73)-ன் படி,

$$\text{வீச்சு } (A + iB) = \text{வீச்சு } (a_1 + ib_1) + \text{வீச்சு } (a_2 + ib_2) + \ldots\ldots + \text{வீச்சு } (a_n + ib_n)$$

அ-து, $\tan^{-1}\dfrac{B}{A} = \tan^{-1}\dfrac{b_1}{a_1} + \tan^{-1}\dfrac{b_2}{a_2} + \ldots\ldots + \tan^{-1}\dfrac{b_n}{a_n}$

**மாதிரிக் கணக்கு 3-9.15.**

**கீழ்க்கண்ட சிக்கல் எண்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளை ஆர்கன் வரை படத்தில் குறிக்க.**

$$2 + 3i, \quad \frac{1}{2 + 3i}, \quad \frac{1 + i}{1 - i}, \quad \left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^2 \qquad (\text{செ. ப. 1944 செ.})$$

கொடுத்துள்ள எண்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளை முறையே A, B, C, D என எடுத்துக் கொள்வோம்.

இப்பொழுது, $A \equiv (2, 3)$

$$\frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i}{4+9} = \frac{2}{13} - \frac{3i}{13}$$

$$\therefore \quad B \equiv \left(\frac{2}{13}, \; -\frac{3}{13}\right)$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

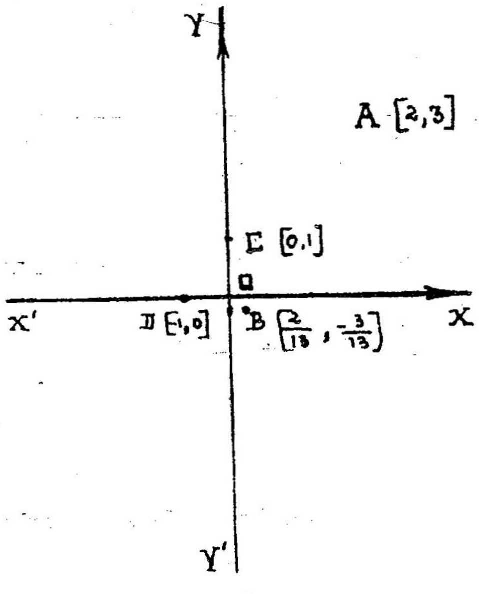
$$= \frac{1-1+2i}{1+1}$$

$$= \frac{2i}{2} = i = 0 + i\,.\,1$$

$$\therefore \quad C \equiv (0, 1)$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = i^2 = -1 = -1 + i.0$$

$$\therefore \quad D \equiv (-1, 0)$$




படம் 6.

படம் 6-ல் A, B, C, D என்ற புள்ளிகள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.

**மாதிரிக் கணக்கு 3-9.16.**

**ஆர்கன் தளத்திலுள்ள $\sqrt{3}+i$, $\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$, $1+\sqrt{3}\,i$ என்ற மூன்று புள்ளிகளும் ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகள் என நிறுவுக.**

(மதுரைப் பல்கலைக் கழகம், 1970 ஏ.)

$\sqrt{3}+i$, $\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$, $1+\sqrt{3}\,i$ என்ற புள்ளிகளை முறையே A, B, C என எடுத்துக் கொண்டால்,

$$A \equiv (\sqrt{3}, 1),\ B \equiv (\sqrt{2}, \sqrt{2}),\ C \equiv (1, \sqrt{3})$$

இப்பொழுது, $AB^2 = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 + (1-\sqrt{2})^2$

$$= 5 - 2\sqrt{6} + 3 - 2\sqrt{2}$$

$$= 8 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}.$$

$$AC^2 = (\sqrt{3}-1)^2 + (1-\sqrt{3})^2$$

$$= 4 - 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3}$$

$$= 8 - 4\sqrt{3}$$

$$BC^2 = (\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$$

$$= 3 - 2\sqrt{2} + 5 - 2\sqrt{6}$$

$$= 8 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$$

எனவே, $AB^2 = 8 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6} = BC^2$

$\therefore \triangle$ ABC ஓர் இருசமபக்க முக்கோணம்.

**மாதிரிக் கணக்கு 3-9.17.**

**ஆர்கன் வரை படத்திலுள்ள $z_1$, $z_2$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர் கோட்டை $\dfrac{mz_2+nz_1}{m+n}$ என்ற புள்ளி $m:n$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது என நிறுவுக.**

$z_1 = x_1 + i\,y_1$, $z_2 = x_2 + i\,y_2$ என இருக்கட்டும்.

$z_1$, $z_2$ என்ற புள்ளிகளை முறையே A, B எனவும், AB ஐ $m:n$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியை P $(z)$ எனவும் எடுத்துக் கொண்டால்,

$$x_p = \frac{mx_2+nx_1}{m+n},\quad y_p = \frac{my_2+ny_1}{m+n}$$

இப்பொழுது, P $(z) = x_p + i\,y_p$

$$= \frac{mx_2 + nx_1}{m + n} + i\frac{(my_2 + ny_1)}{m + n}$$

$$= \frac{m(x_2 + iy_2) + n(x_1 + iy_1)}{m + n}$$

$$= \frac{mz_2 + nz_1}{m + n} \qquad (81)$$

**துணை முடிவு :**

AB-ன் நடுப்புள்ளி M $(z)$ எனில்,

$$M(z) = \frac{z_1 + z_2}{2} \qquad (82)$$

**பயிற்சி 3 (அ)**

பின்வரும் எண்களை $x + iy$ என்ற வடிவத்தில் (Form) எழுதுக.

1. $\frac{2}{3 - 4i}$

2. $\frac{3}{2 + 3i}$

3. $\frac{1}{a + ib}$

4. $\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}$

5. $\frac{2 + 5i}{4 - 3i}$

6. $\frac{3 + 2i}{4 + 5i}$

7. $\frac{1 + \sqrt{3}\,i}{1 - \sqrt{3}\,i}$

8. $\frac{a + ib}{a - ib}$

9. $\frac{1}{3 - 2i} + \frac{1}{2 - 3i}$

10. $\frac{(1 + i)^2}{1 - i}$

11. $(3a + i)^3$

12. $\frac{1 + \sin\theta + i\cos\theta}{1 + \sin\theta - i\cos\theta}$

13. சுருக்குக :

(i) $(1+i)^{-2}+(1-i)^{-2}$

(ii) $(1+i)^{-4}+(1-i)^{-4}$

14. $(x+iy)\,(x-iy)$ ஐச் சுருக்குக. கிடைக்கும் முடிவைப் பயன்படுத்தி, $(x-1)^2+(y-2)^2$ ஐக் காரணிப் படுத்துக.

15. $(2+3i)\,(3-4i)=a+ib$ எனில், $a^2+b^2$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

16. $(2-i)\,x+(1+3i)\,y+2=0$ ஆக இருக்கும்படி $x$, $y$ என்ற மெய் எண்களைக் காண்க.

17. $\dfrac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1-\sin\theta-i\cos\theta}=i\,(\tan\theta+\sec\theta)$ என நிறுவுக.

(பல்கலைக் கழகக் கேள்வி)

18. $x+iy=\dfrac{3}{2+\cos\theta+i\sin\theta}$ எனில்,

$x^2+y^2=4x-3$ என நிறுவுக. (ப. கே.)

19. $\dfrac{a+ib}{c+id}$, $\dfrac{a-ib}{c-id}$ என்பவை இணைச் சிக்கல் எண்கள் என நிறுவுக.

20. $\dfrac{(1+2i)^2}{1+3i}$-ன் இணைச் சிக்கல் எண் $\dfrac{9+13i}{10}$ என நிறுவுக.

21. $\sqrt{x+iy}=A+iB$ எனில், $A^2-B^2=x$, $2AB=y$ என நிறுவுக. இவைகளைப் பயன்படுத்தி $3+4i$-ன் வர்க்க மூலத்தைக் காண்க.

22. இரு சிக்கல் எண்களின் கூட்டுத் தொகையும் பெருக்குத் தொகையும் மெய் எண்களாக இருந்தால், அவை இரண்டும் இணைச் சிக்கல் எண்களாக இருக்க வேண்டும் அல்லது மெய் எண்களாக இருக்க வேண்டும் என நிறுவுக.

23. $|\cos\theta+i\sin\theta|=1$ என நிறுவுக.

24. $z=x+iy$ எனில், $|x|\leqslant|z|$, $|y|\leqslant|z|$ என நிறுவுக.

25. $z$ ஒரு சிக்கல் எண் எனில், $-|z|\leqslant$ மெ$(z)\leqslant|z|$ என நிறுவுக.

26. (i) $\left|\dfrac{x-iy}{x+iy}\right|=1$ என நிறுவுக.

(ii) $z$ ஒரு சிக்கல் எண் எனில், $\left|\frac{z-1}{1-\bar{z}}\right| = 1$ என நிறுவுக.

27. $z_1, z_2$ என்பவை இரு சிக்கல் எண்கள் எனில்,

$\left|\frac{z_1 - z_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}\right| = 1$ என நிறுவுக.

28. $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ எனில், $z_1$, $z_2$ என்ற சிக்கல் எண்களுடைய வீச்சுகளின் (வீச்சங்களின்) வேறுபாடு $\frac{\pi}{2}$ என நிறுவுக. (ம. ப. 1968 ஏ.)

29. ஒரு சிக்கல் எண்ணின் மட்டையும் வீச்சையும் (வீச்சத்தையும்) வரையறுக்க (Define). அதை வரை கணித முறைப்படி குறிக்கும் முறையை விளக்குக. (செ.ப. 1967 செ.)

பின்வரும் எண்கள் ஒவ்வொன்றினுடைய மட்டையும், வீச்சையும் (வீச்சத்தையும்) காண்க :

30. $1 + i$

31. $-1 + i$

32. $-1 - i$

33. $12 + 5i$

34. $12 - 5i$

35. $3 - 4i$

36. $-1 + i\sqrt{3}$

37. $5$

38. $-3$

39. $2i$

40. $-7i$

41. $\frac{5 - 2i}{i}$

42. $\frac{1 + i}{1 - i}$

43. $\frac{1 - i}{1 + i}$

44. $\overline{\left(\frac{1+i}{1-i}\right)}$

45. $\frac{i-3}{i+1}$ (செ. ப. 1966 செ.)

46. $\frac{1+2i}{3+4i}$

47. $\frac{2+3i}{1-i}$

48. $\frac{5+i}{2+3i}$

49. $\frac{1+i3\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2i}$

50. $\frac{1+2i}{1-(1-i)^2}$

51. $\left(\frac{2+i}{3-i}\right)^2$

52. $\frac{(1+i)(1+2i)}{(1+3i)}$ (செ. ப. 1954 செ.)

53. $\frac{(2-i)(1+i)}{(1-i)}$ (செ. ப. 1943 மா.)

54. $\frac{(1+i)(2+i)}{(3-i)}$

55. $\cos\alpha - i\sin\alpha$

56. $\sin\alpha + i\cos\alpha$

57. $\sin\alpha - i\cos\alpha$

58. $1 + i\tan\alpha$

59. $\tan\beta - i$

60. $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$

61. $1 + \cos\alpha - i\sin\alpha$

62. $1 - \cos\alpha + i\sin\alpha$

63. $1 - \cos\alpha - i\sin\alpha$

64. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$ ஐ $A + iB$ என்ற வடிவத்தில் (Form) எழுதுக; அதன் மட்டையும் வீச்சையும் (வீச்சத்தையும்) காண்க.

65. $z_1, z_2$ என்பவை எவையேனும் இரு சிக்கல் எண்கள் எனில்.

(i) $|z_1 z_2| = |z_1| . |z_2|$

(ii) வீச்சு $(z_1 z_2)$ = வீச்சு $z_1$ + வீச்சு $z_2$ என நிறுவுக.

[செ. ப. 1967 ஏ.]
[ம. ப. 1969 ஏ.]
[ம. ப. 1970 செ..]

66. $\alpha, \beta, \gamma$ என்பவை ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள், $l = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $m = \cos\beta + i\sin\beta$, $n = \cos\gamma + i\sin\gamma$ எனில். $lmn = -1$ என நிரூபிக்க.

67. $(1+i)(1+\sqrt{3}i) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right]$ என நிறுவுக.

68. $(1+\cos\theta + i\sin\theta)(1+\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = x + iy$ எனில். $y = x\tan\frac{3\theta}{2}$ என்றும்,

$x^2 + y^2 = 16\cos^2\theta \, . \, \cos^2\frac{\theta}{2}$ என்றும் நிறுவுக.

69. $z_1, z_2$ என்பவை இணைச் சிக்கல் எண்கள், $z_3, z_4$ என்பவைகளும் இணைச் சிக்கல் எண்கள் எனில்,

வீச்சு $\left(\frac{z_1}{z_4}\right)$ = வீச்சு $\left(\frac{z_3}{z_2}\right)$ என நிறுவுக.

## விடைகள்

1. $\frac{6}{25} + i\,\frac{8}{25}$

2. $\frac{-6}{13} + i\left(-\frac{9}{13}\right)$

3. $\frac{a}{a^2+b^2} + i\,\frac{(-b)}{a^2+b^2}$

4. $\cos\theta + i(-\sin\theta)$

5. $-\frac{7}{25} + i\,\frac{26}{25}$

6. $\frac{22}{41} + i\,\frac{(-7)}{41}$

7. $-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + i\,\frac{2ab}{a^2 + b^2}$

9. $\frac{5}{13} + i\,\frac{5}{13}$

10. $-1 + i$

11. $(27a^3 - 9a) + i(27a^2 - 1)$

12. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

13. (i) $0$ (ii) $-\frac{1}{2}$

14. $x^2 + y^2$ ; $[(x-1) + i(y-2)]$ $[(x-1) - i(y-2)]$

15. 325

16. $x = -\frac{6}{7}$ : $y = -\frac{2}{7}$

21. $\pm(2 + i)$

30. $\sqrt{2}$ . $+\frac{\pi}{4}$ .

31. $\sqrt{2}$, $\frac{3\pi}{4}$ .

32. $\sqrt{2}$ , $-\frac{3\pi}{4}$

33. 13, $22^\circ\,37'$ .

34. 13, $-22^\circ\,37'$ .

35. 5, $-53^\circ\,8'$ .

36. 2, $\frac{2\pi}{3}$ .

37. 5, 0 .

38. 3, $\pi$

39. $2, \frac{\pi}{2}$

40. $7, -\frac{\pi}{2}$

41. $\sqrt{29}, -\pi + \tan^{-1}\frac{5}{2}$

42. $1, \frac{\pi}{2}$

43. $1, -\frac{\pi}{2}$

44. $1, -\frac{\pi}{2}$

45. $\sqrt{5}, \pi - \tan^{-1} 2$

46. $\frac{1}{\sqrt{5}}, \tan^{-1}\frac{2}{11}$

47. $\sqrt{\frac{13}{2}}, \pi - \tan^{-1} 5$

48. $\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}$

49. $2, \frac{\pi}{6}$

50. $1, 0$

51. $\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}$

52. $1, \tan^{-1}\frac{3}{4}$

53. $\sqrt{5}, \tan^{-1} 2$

54. $1, \frac{\pi}{2}$

55. $1, -\alpha$

56. $1, \frac{\pi}{2} - \alpha$

57. $1, \alpha - \frac{\pi}{2}$

58. $\sec \alpha,\ \alpha$

59. $\sec \beta,\ \beta - \frac{\pi}{2}$

60. $2 \cos \frac{\alpha}{2},\ \frac{\alpha}{2}$

61. $2 \cos \frac{\alpha}{2},\ -\frac{\alpha}{2}$

62. $2 \sin \frac{\alpha}{2},\ \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$

63. $2 \sin \frac{\alpha}{2},\ \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2}$

64. $0 - 2i : 2 : -\frac{\pi}{2}$

## பயிற்சி 3 (ஆ)

1. $\frac{3}{2}$ $(7i - 1)(1 - i)$, $\frac{5(i-3)}{i+1}$, $\frac{2(i-18)}{(1+i)^2}$, $3 - \frac{4}{i}$ என்ற எண்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளை ஆர்கன் வரை படத்தில் குறிக்க.

2. கீழ்க்கண்ட புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் உள்ளன என நிறுவுக.

(i) $1 + 3i,\ 2 + 7i,\ -2 - 9i$

(ii) $1 + 4i,\ 3 - 2i,\ -3 + 16i$

(iii) $-4 - 5i,\ 1 - i,\ 6 + 3i$

(iv) $-7 + 5i,\ 8 - i,\ 18 - 5i$

3. கீழ்க்கண்ட புள்ளிகள் ஓர் இருசமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகள் (Vertices) என நிறுவுக.

(i) $1 + 4i,\ 4 + i,\ 8 + 8i$

(ii) $3 + 4i,\ -13 + 2i,\ 1 - 6i$

(iii) $-3i,\ -5 - 3i,\ 3 + i$

(iv) $1,\ \frac{1}{2}(1 + i),\ i$ (செ. ப. 1951 செ.)

4. கீழ்க்கண்ட புள்ளிகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகள் என நிறுவுக.

(i) $2 + 2i, \quad -2 - 2i, \quad -2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}i$

(ii) $2 + 4i, \quad 2 + 6i, \quad 2 + \sqrt{3} + 5i$

(iii) $-2, \quad 1 - \sqrt{3}i, \quad 1 + \sqrt{3}i$

(iv) $2\sqrt{3} + 2i, \quad -2\sqrt{3} + 2i, \quad -4i$

(ம. ப. 1971 செ.)

5. கீழ்க்கண்ட புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிகள் என நிறுவுக.

(i) $1 + 2i, \quad 3 + 6i, \quad 3 + i$

(ii) $-3 - 4i, \quad 2 + 6i, \quad -6 + 10i$

(iii) $8 - 10i, \quad 7 - 3i, \quad -4i$

(iv) $5 + 2i, \quad 6 - 15i, \quad 0$

6. கீழ்க்கண்ட புள்ளிகள் ஓர் இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிகள் என நிறுவுக.

(i) $7 + 9i, \quad 3 - 7i, \quad -3 + 3i$

(ii) $-2 + 5i, \quad 3 - 4i, \quad 7 + 10i$

(iii) $1 + 2i, \quad 2 + 3i, \quad 3i$

(iv) $5 + 2i, \quad 6i, \quad -8 \quad i$

7. கீழ்க்கண்ட புள்ளிகள் ஓர் இணைகரத்தின் உச்சிகள் என நிறுவுக.

(i) $5 - 3i, \quad -2 + 7i, \quad -1 - 3i, \quad 6 - 13i$

(ம. ப. 1971 ஏ.)

(ii) $1 + 2i, \quad 2 - i, \quad 5 + 3i, \quad 4 + 6i$

(iii) $3 - 5i, \quad -5 - 4i, \quad 7 + 10i, \quad 15 + 9i$

(iv) $-1 - 6i, \quad 2 - 5i, \quad 7 + 2i, \quad 4 + i$

8. கீழ்க்கண்ட புள்ளிகள் ஒரு செவ்வகத்தின் உச்சிகள் என நிறுவுக.

(i) $2 - 2i, \quad 8 + 4i, \quad 5 + 7i, \quad -1 + i$

(ii) $-2 - 2i, \quad 4 + 4i, \quad 1 + 7i, \quad -5 + i$

9. கீழ்க்கண்ட புள்ளிகள் ஒரு சாய்சதுரத்தின் உச்சிகள் என நிறுவுக.

(i) $2 - i, \quad 3 + 4i, \quad -2 + 3i, \quad -3 - 2i$
(ii) $3 + 5i, \quad -5 + 4i, \quad -1 - 3i, \quad 7 - 2i$

10. கீழ்க்கண்ட புள்ளிகள் ஒரு சதுரத்தின் உச்சிகள் என நிறுவுக.

(i) $9 + i, \quad 4 + 13i, \quad -8 + 8i, \quad -3 - 4i$
(ii) $2 + i, \quad 4 + 3i, \quad 2 + 5i, \; 3i$

11. கீழ்க்கண்ட புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்தின் மேல் உள்ளன என நிறுவுக. அவ்வட்டத்தின் ஆரத்தையும், மையத்தையும் காண்க.

(i) $9 + 3i, \quad 7 - i, \quad 1 - i$
(ii) $-3 + 11i, \quad 5 + 9i, \quad 8, \quad 6 + 8i$

12. $a + ib, \; \dfrac{1}{-a + ib}$ என்ற புள்ளிகள் ஆதி (Origin) வழியே செல்லும் ஒரு நேர்கோட்டில் உள்ளன என நிறுவுக.

13. ஆர்கன் வரை படத்தில் $z_1, z_2$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டின் நடுப்புள்ளி $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ எனக் காட்டுக.

14. A $(\alpha)$, B $(\beta)$, C $(\gamma)$, D $(\delta)$ என்பவை ஆர்கன் வரை படத்தில் உள்ள நான்கு புள்ளிகள். $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ எனில், ABCD ஓர் இணைகரம் என நிறுவுக.

15. A, B என்ற புள்ளிகள் முறையே $-4 + 3i, \; 5 + 12i$ ஆகும். AB ஐ C உள்ளேயும், D வெளியிலும் 5 : 13 என்ற விகிதத்தில் பிரித்தால், C, D என்ற புள்ளிகளின் மாறிகளைக் (Arguments) காண்க.

16. $z_1, z_2, z_3$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் மையக்கோட்டுச் சந்தி (Centroid), $\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$ என நிறுவுக.

17. A, B, C என்ற புள்ளிகளின் மாறிகள் முறையே $-2 - 3i$, $3 + 5i$, $2 + i$ ஆகும். G ஆனது முக்கோணம் ABC -ன் மையக் கோட்டுச் சந்தி எனில், G -னுடைய மாறியினது (Argument) மட்டையும், வீச்சையும் (வீச்சத்தையும்) காண்க.

18. A, B, C என்ற புள்ளிகளின் மாறிகள் முறையே $z_1, z_2, z_3$ ஆகும். G என்ற புள்ளி முக்கோணம் ABC-ன் மையக்கோட்டுச் சந்தி. $4z_1 + z_2 + z_3 = 0$ எனில், AG-ன் நடுப்புள்ளி ஆதி (Origin) எனக் காட்டுக.

**விடைகள்**

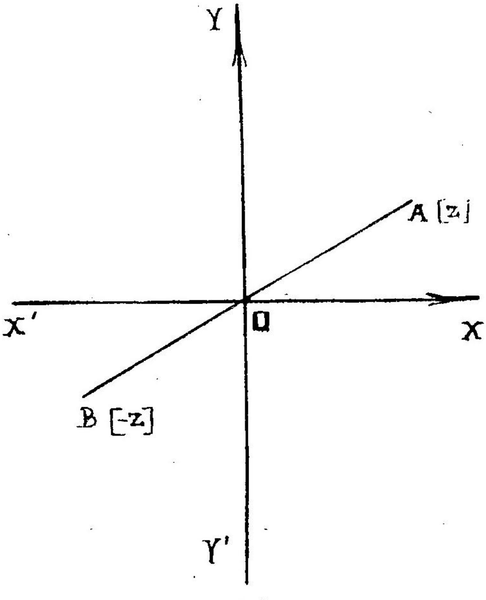
11. (i) $5 ; 4 + 3i$

(ii) $\sqrt{85} ; -1 + 2i$

15. $\frac{1}{2}(-3 + 11i) ; -\frac{1}{8}(77 + 21i)$.

17. $\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}$.

**3.10. $-z$ ஐ வரை கணித முறையில் குறித்தல் (Geometrical Representation of $-z$)**




படம் 7.

A என்ற புள்ளி $z$ என்ற சிக்கல் எண்ணைக் குறிக்கட்டும் (படம் 7)

எனவே, $z = \overrightarrow{OA}$

AO ஐ, AO = OB ஆக இருக்கும்படி B க்கு நீட்டு.

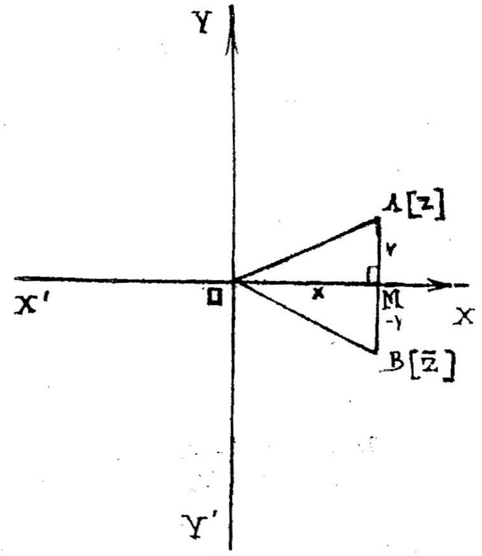
அதாவது, B ஆனது O-ல் A-ன் பிம்பமாகும். இப்பொழுது, B ஆனது $-z$ ஐக் குறிக்கிறது.

**நிறுவல் :**

$$\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{BO}$$
$$= -\overrightarrow{OA}$$
$$= -z$$

∴ B என்ற புள்ளி $-z$ ஐக் குறிக்கிறது.

## 3.11. $\bar{z}$ ஐ வரை கணித முறையில் குறித்தல்




படம் 8.

A என்ற புள்ளி $z = x + iy$ என்ற சிக்கல் எண்ணைக் குறிக்கட்டும். (படம் 8). OX-ல் A-ன் பிம்பத்தை B என எடுத்துக்கொள். இப்பொழுது, B ஆனது $\bar{z}$ என்ற எண்ணைக் குறிக்கிறது.

**நிறுவல் :**

OX ஐ M-ல் வெட்டும்படி AB ஐச் சேர்.

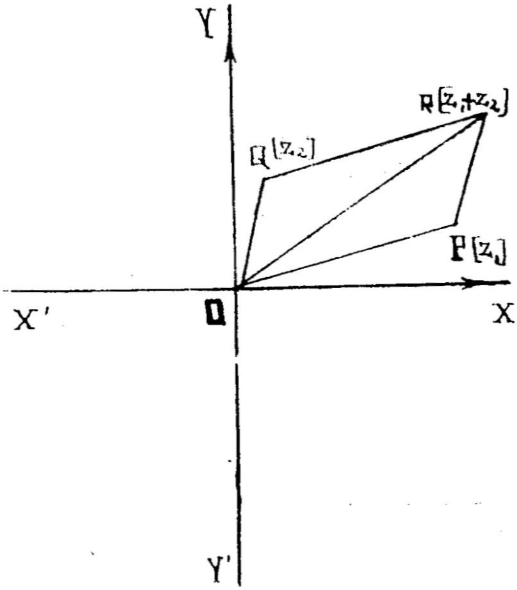
இப்பொழுது, $AB \perp OX$, $BM = MA$

$A \equiv (OM, MA) \equiv (x, y)$

$B \equiv (OM, MB) \equiv (OM, -BM) \equiv (x, -y)$

$\therefore$ B ஆனது $\bar{z}$ ஐக் குறிக்கிறது.

**3.12. $z_1+z_2$ ஐ வரை கணித முறையில் குறித்தல்**




படம் 9.

P, Q என்ற புள்ளிகள் முறையே $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ என்ற சிக்கல் எண்களைக் குறிக்கட்டும் (படம் 9). OPRQ ஓர் இணைகரமாக இருக்கும்படி R என்னும் புள்ளியை எடு. இப்பொழுது, R ஆனது $z_1 + z_2$ என்ற சிக்கல் எண்ணைக் குறிக்கிறது.

**நிறுவல்:**

R -ன் $x$ கூறு [$x$ co-ordinate of R]

= OX -ன் மீது OR -ன் வீழ்ச்சி (Projection)

= OX -ன் மீது OP -ன் வீழ்ச்சி + OX -ன் மீது PR -ன் வீழ்ச்சி

= OX -ன் மீது OP -ன் வீழ்ச்சி + OX -ன் மீது OQ -ன் வீழ்ச்சி

= $x_1 + x_2$

இதேபோல், R-ன் $y$ கூறு $= y_1 + y_2$ என்று நிறுவலாம். எனவே, R என்ற புள்ளி $x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) = z_1 + z_2$ என்ற சிக்கல் எண்ணைக் குறிக்கிறது.

குறிப்பு :

1. $\overrightarrow{OR} = z_1 + z_2 = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$

எனவே, இரண்டு சிக்கல் எண்களைக் குறிக்கும் திசையிகளை இணைகர விதிப்படி கூட்டி, அந்த எண்களின் கூட்டுத் தொகையை வரை கணித முறையில் காணலாம்.

2. $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OQ} = z_2$

$\therefore\ \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR}$

எனவே, முதலில் O இலிருந்து $z_1$ ஐக் குறிக்கும் $\overrightarrow{OP}$ என்ற திசையியை வரைந்து, பின்பு P இலிருந்து $z_2$ ஐக் குறிக்கும் $\overrightarrow{PR}$ என்ற திசையியை வரைந்து, $z_1 + z_2$ என்ற எண்ணைக் குறிக்கும் R என்னும் புள்ளியை அடையலாம்.

துணை முடிவுகள் :

1. OPR என்ற முக்கோணத்தில், $OR < OP + PR$

$\therefore\ |z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$

Q என்ற புள்ளி OP-ன் மீது இருந்தால், R என்ற புள்ளியும் OP-ன் மீது இருக்கும். இப்பொழுது, $OR = OP + PR$

$\therefore\ |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

எனவே, $z_1, z_2$ என்பவை இரு சிக்கல் எண்கள் எனில்,

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \qquad (83)$$

2. OPR என்ற முக்கோணத்தில்,

$OR > OP - PR$

$\therefore\ |z_1 + z_2| > |z_1| - |z_2|$

O, R, P என்ற புள்ளிகள் இதே வரிசைப்படி ஒரு நேர் கோட்டில் இருந்தால், OR = OP — RP

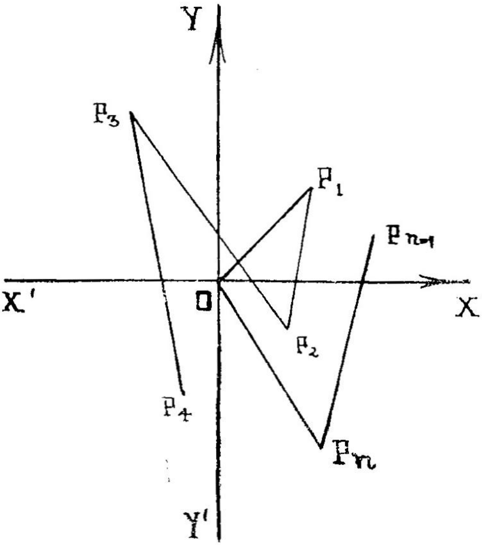
$$\therefore \quad |z_1 + z_2| = |z_1| - |z_2|$$

எனவே, $z_1$, $z_2$ என்பவை இரு சிக்கல் எண்கள் எனில்,

$$|z_1 + z_2| \geqslant |z_1| - |z_2| \qquad (84)$$

இதேபோல், $|z_1 + z_2| \geqslant |z_2| - |z_1|$ (85)

3.




படம் 10

$\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_2P_3}$, ……, $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ என்ற திசையிகள் (Vectors) முறையே $z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots, z_n$ என்ற சிக்கல் எண்களைக் குறிக்கும்படி $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots, P_n$ என்ற புள்ளிகளை ஆர்கன் வரை படத்தில் [படம் 10] எடுத்துக் கொண்டோமானால்,

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots\ldots + z_n = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} \ldots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n}$$

$$= \overrightarrow{OP_n}$$

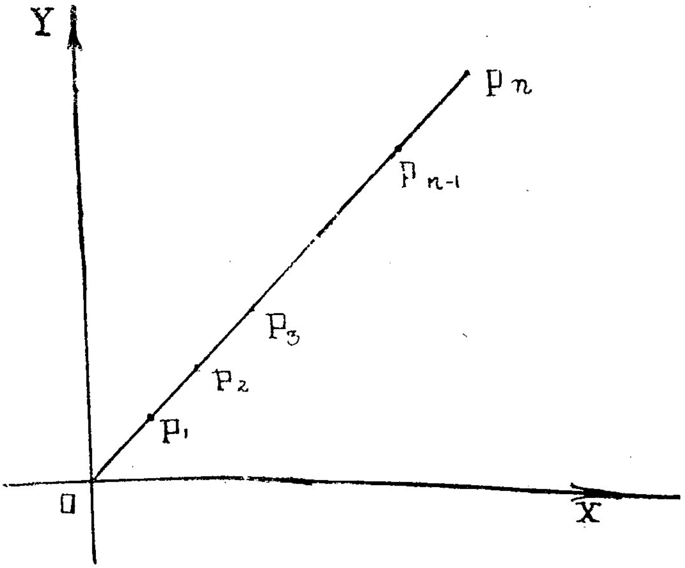
$$\therefore \quad |z_1 + z_2 + z_3 + \ldots\ldots + z_n| = OP_n$$

4. துணை முடிவு 3-ல், O-க்கும் $P_n$-க்கும் இடையேயுள்ள மிகச் சிறு தொலைவு (Shortest Distance) $OP_n$ ஆகும்.

$$\therefore \quad OP_n < OP_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + \dots\dots\dots + P_{n-1}P_n$$

அதாவது,

$$|z_1 + z_2 + z_3 + \dots\dots\dots + z_n| < |z_1| + |z_2| + |z_3| + \dots\dots\dots + |z_n|$$




படம் 11

O, $P_1$, $P_2$, ........., $P_{n-1}$, $P_n$ என்ற புள்ளிகள் இதே வரிசைப்படி ஒரு நேர்கோட்டில் அமைந்தால் (படம் 11),

$$OP_n = OP_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + \dots\dots\dots + P_{n-1}P_n$$

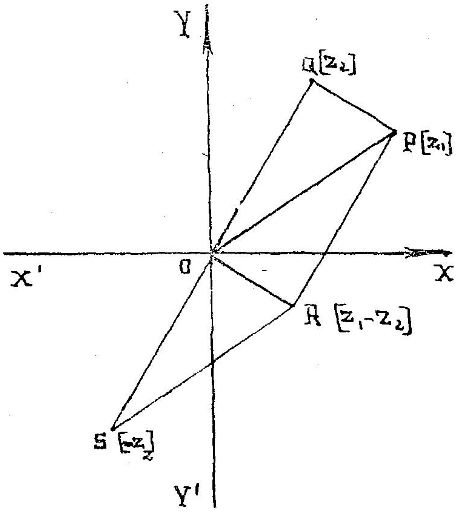
அதாவது,

$$|z_1 + z_2 + z_3 + \dots\dots\dots + z_n| = |z_1| + |z_2| + |z_3| + \dots\dots\dots + |z_n|$$

எனவே,

$$|z_1 + z_2 + z_3 + \dots\dots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + |z_3| + \dots\dots + |z_n| \quad (86)$$

## 3.13. $z_1 - z_2$ ஐ வரை கணித முறையில் குறித்தல்




படம் 12

P, Q, S என்ற புள்ளிகள் முறையே $z_1$, $z_2$, $-z_2$ என்ற சிக்கல் எண்களைக் குறிக்கட்டும் (படம் 12). OPRS ஓர் இணைகரமாக இருக்கும்படி R என்னும் புள்ளியை எடுத்துக் கொள். இப்பொழுது R ஆனது $z_1 - z_2$ ஐக் குறிக்கிறது.

**நிறுவல் :**

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR}$$
$$= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OS}$$
$$= z_1 + (-z_2)$$
$$= z_1 - z_2$$

எனவே, R என்ற புள்ளி $z_1 - z_2$ ஐக் குறிக்கிறது.

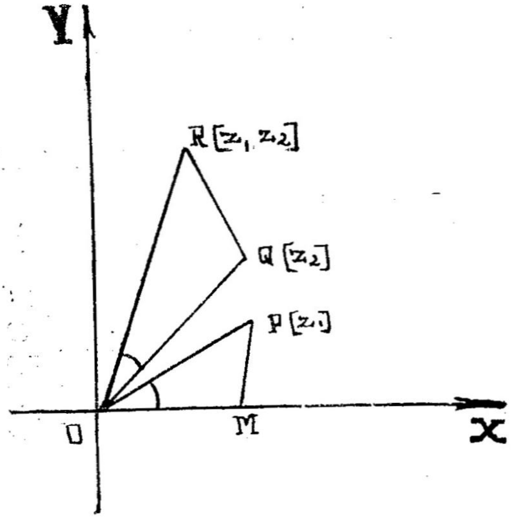
**துணை முடிவுகள் :**

1. OQ PR ஓர் இணைகரமாக இருப்பதால்,

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OR} = z_1 - z_2$$

2. $$|z_1 - z_2| = QP$$

## 3.14. $z_1 z_2$ ஐ வரை கணித முறையில் குறித்தல்




படம் 13

P, Q, M என்ற புள்ளிகள் முறையே $z_1$, $z_2$, 1 என்ற எண்களைக் குறிக்கட்டும் (படம் 13). OQ மீது OQR என்ற முக்கோணத்தை △ OMP-க்கு நேராக வடிவொத்ததாக (Directly Similar) வரை. இப்பொழுது, R என்ற புள்ளி $z_1 z_2$ ஐக் குறிக்கிறது.

**நிறுவல் :**

R என்ற புள்ளி $z_3$ என்ற எண்ணைக் குறிக்கட்டும்.

வரைதல் படி, $\frac{OR}{OQ} = \frac{OP}{OM}$

அ - து, $\frac{|z_3|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{1}$

$\therefore \quad |z_3| = |z_1| \cdot |z_2|$

$= |z_1 z_2|$ .................. (i)

மேலும், வீச்சு $z_3 = \angle XOR$

$= \angle XOQ + \angle QOR$

$= \angle XOQ + \angle XOP \quad [\because \triangle OQR \parallel \triangle OMP]$

$=$ வீச்சு $z_2$ + வீச்சு $z_1$

$=$ வீச்சு $z_1 z_2$ .................. (ii)

(i), (ii)-லிருந்து, $z_3 = z_1 z_2$

$\therefore$ R ஆனது $z_1 z_2$ ஐக் குறிக்கிறது.

**துணை முடிவுகள் :**

1. $z_2 = i$ எனில், $|z_2| = 1$, வீச்சு $z_2 = 90°$

இப்பொழுது, $|z_3| = |z_1| \cdot |z_2| = |z_1|$

$\therefore$ OR = OP

மேலும், வீச்சு $z_3$ = வீச்சு $z_1$ + வீச்சு $z_2$

அ - து, $\angle XOR = \angle XOP + 90°$

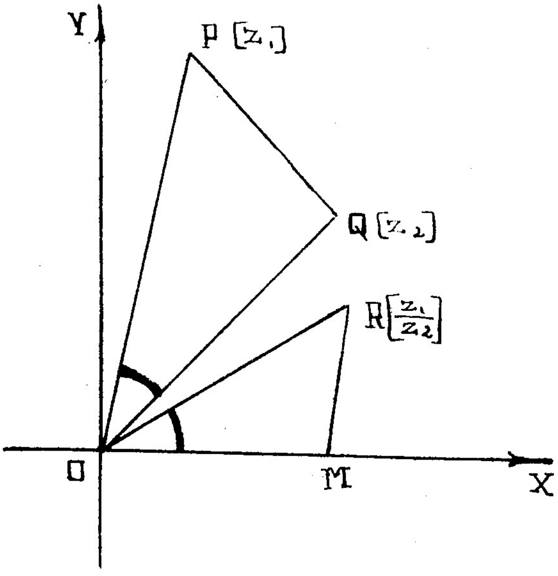
எனவே, OR ஐ அடைய OP ஐ இடஞ்சுழியாக (Anti-clockwise) 90° சுழற்ற வேண்டும்.

ஆகவே, P என்ற புள்ளி $z_1$ ஐக் குறித்தால், O ஐ நிலையாகக் கொண்டு OP ஐ இடஞ்சுழியாக 90° சுழற்றுவதனுல் கிடைக்கும் P-ன் புதிய இடம் (Position) R ஆனது $z_1 i$ ஐக் குறிக்கும்.

2. P என்ற புள்ளி $z_1$ ஐக் குறித்தால், O ஐ நிலையாகக் கொண்டு OP ஐ வலஞ்சுழியாக (Clockwise) 90° சுழற்றுவதனுல் கிடைக்கும் P-ன் புதிய இடம் R ஆனது $-z_1 i$ ஐக் குறிக்கும்.

3. P, Q என்ற புள்ளிகள் முறையே $z_1, z_2$ என்ற எண்களைக் குறித்தால், $\overrightarrow{PQ} = z_2 - z_1$. P ஐ நிலையாகக் கொண்டு PQ ஐ இடஞ்சுழியாக (Anti-clockwise) 90° சுழற்றுவதனுல் கிடைக்கும் Q-ன் புதிய இடம் $z_1 + i(z_2 - z_1)$ என்ற எண்ணைக் குறிக்கும்.

**3.15.** $z_2 \neq 0$ எனில், $\frac{z_1}{z_2}$ **ஐ வரை கணித முறையில் குறித்தல்.**




படம் 14

P, Q, M என்ற புள்ளிகள் முறையே $z_1$, $z_2$, 1 என்ற எண்களைக் குறிக்கட்டும் (படம் 14). OM மீது OMR என்ற முக்கோணத்தை $\triangle$OQP - க்கு நேராக வடிவொத்ததாக (Directly Similar) வரை.

இப்போது R என்ற புள்ளி $\frac{z_1}{z_2}$ ஐக் குறிக்கிறது.

**நிறுவல் :**

R என்ற புள்ளி $z_3$ என்ற எண்ணைக் குறிக்கட்டும்.

வரைதல் படி,

$$\frac{OR}{OM} = \frac{OP}{OQ}$$

$$\therefore \quad \frac{|z_3|}{1} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

அ - து, $|z_3| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ ................. (i)

மேலும், வீச்சு $z_3 = \angle XOR$

$= \angle QOP \quad [\because \quad \triangle OMR \,|||\, \triangle OQP]$

$= \angle XOP - \angle XOQ$

$=$ வீச்சு $z_1$ — வீச்சு $z_2$

$=$ வீச்சு $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ ................. (ii)

(i), (ii) - லிருந்து, $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$

$\therefore$ R என்ற புள்ளி $\frac{z_1}{z_2}$ என்ற எண்ணைக் குறிக்கிறது.

**மாற்று முறை :**

3.14.-ன் படி, $z_1 = z_3 \cdot z_2$

$$\therefore \quad z_3 = \frac{z_1}{z_2}$$

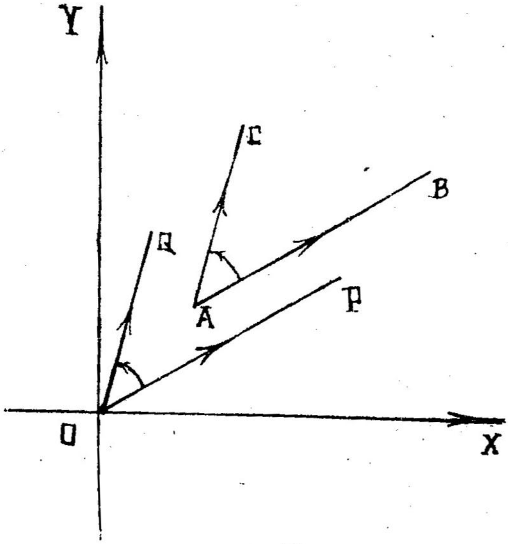
$\therefore$ R என்ற புள்ளி $\frac{z_1}{z_2}$ என்ற எண்ணைக் குறிக்கிறது.

### 3.16. இரண்டு திசையிகளுடைய ஈவின் வீச்சு (வீச்சம்) (Amplitude of the Quotient of Two Vectors)

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ என்பவை A-லிருந்து வரையப்பட்ட எவையேனும் இரண்டு திசையிகள் (Vectors) எனில்,

$$\text{வீச்சு} \left( \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}} \right) = \angle BAC \qquad (87)$$

இங்கே $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}}$ என்பது, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ என்ற திசையிகள் குறிக்கும் சிக்கல் எண்களின் ஈவைக் குறிக்கிறது.




படம் 15.

**நிறுவல் :**

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{AC}$ ஆக இருக்கும்படி P. Q என்ற புள்ளிகளை எடுத்துக்கொள் (படம் 15).

இப்பொழுது,

$$\text{வீச்சு}\left(\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}}\right) = \text{வீச்சு } \overrightarrow{AC} - \text{வீச்சு } \overrightarrow{AB}$$

$$= \text{வீச்சு } \overrightarrow{OQ} - \text{வீச்சு } \overrightarrow{OP}$$

$$= \angle XOQ - \angle XOP$$

$$= \angle POQ$$

$$= \angle BAC$$

= திசையி $\overrightarrow{AB}$ ஐ திசையி $\overrightarrow{AC}$ வரை சுழற்று வதால் ஏற்படும் கோணம்

**துணை முடிவு :**

$P_1, P_2, P_3$ என்ற புள்ளிகள் முறையே $z_1, z_2, z_3$ என்ற எண்களைக் குறித்தால்,

$$\text{வீச்சு}\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\right) = \text{வீச்சு } \frac{\overrightarrow{P_2P_1}}{\overrightarrow{P_2P_3}}$$

$$= \angle P_3P_2P_1 \qquad (88)$$

**குறிப்பு :**

1. $\text{வீச்சு}\left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}\right) = \angle P_3P_2P_1$

2. $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$ முழுவதுமே மெய்யாக இருந்தால் (Purely Real),

$P_1, P_2, P_3$ என்ற மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர்கோட்டில் உள்ளன.

ஏனென்றால்,

$$\text{வீச்சு}\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\right) = 0 \text{ அல்லது } \pi$$

[சூத்திரங்கள் (77), (78)-ன் படி]

ஆனால், வீச்சு $\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\right) = \angle P_3P_2P_1$ [சூத்திரம் (88)-ன் படி]

$$\therefore \quad \angle P_3P_2P_1 = 0 \text{ அல்லது } \pi$$

எனவே, $P_1$, $P_2$, $P_3$ என்ற மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர்கோட்டில் உள்ளன.

3. $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$ முழுவதுமே கற்பனையாக இருந்தால் (Purely Imaginary), $P_2P_1 \perp P_2P_3$

ஏனென்றால்,

$$\text{வீச்சு } \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{\pi}{2} \text{ அல்லது } -\frac{\pi}{2}$$

[சூத்திரங்கள் (79), (80)-ன் படி]

$$\text{ஆனால், வீச்சு} \left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\right) = \angle P_3P_2P_1$$

[சூத்திரம் (88)-ன் படி]

$$\therefore \angle P_3P_2P_1 = \frac{\pi}{2} \text{ அல்லது } -\frac{\pi}{2}$$

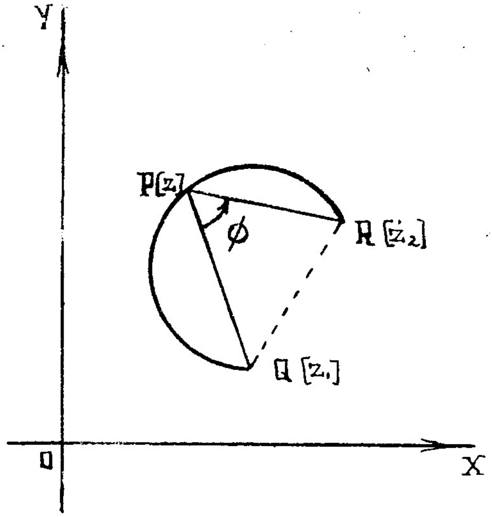
எனவே, $P_2P_1 \perp P_2P_3$

4. $Q\ (z_1)$, $R\ (z_2)$ என்பவை நிலையான புள்ளிகள், $P\ (z)$ ஒரு நகரும் புள்ளி, வீச்சு $\frac{z - z_2}{z - z_1} = \phi$ (ஒரு நிலையான கோணம்) எனில், $P\ (z)$-ன் இயங்கு வழியானது $\angle QPR = \phi$ ஆகவுள்ள QPR என்ற வட்ட வில்லாகும்.

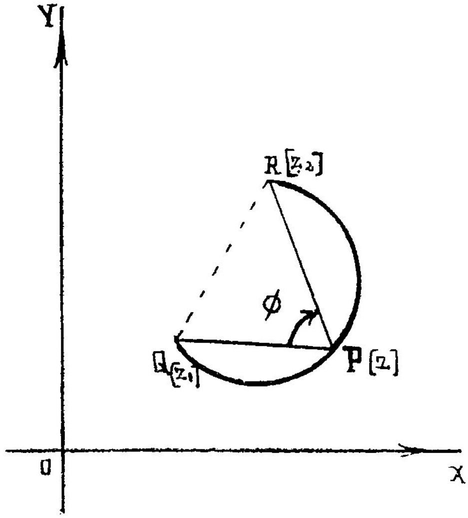
ஏனென்றால்,

$$\phi = \text{வீச்சு } \frac{z - z_2}{z - z_1} = \text{வீச்சு } \frac{\overrightarrow{RP}}{\overrightarrow{QP}} = \angle QPR.$$

Q, R நிலையான புள்ளிகள். எனவே $P\ (z)$-ன் இயங்கு வழியானது $\angle QPR = \phi$ ஆகவுள்ள QPR என்ற வட்ட வில்லாகும்.




படம் 16 (அ)




படம் 16 (ஆ)

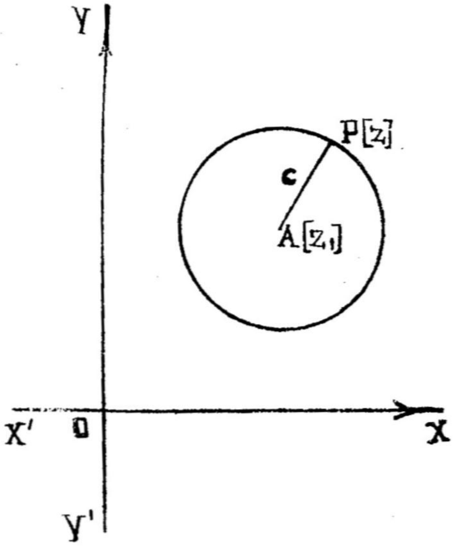
$\phi$ நேர் மதிப்பு (Positive Value) உடையதென்றால், P (z)-ன் இயங்கு வழியானது படம் 16 (அ)-ல் காட்டியுள்ளபடி இருக்கும்.

$\phi$ எதிர் மதிப்பு (Negative Value) உடையதென்றால், P ($z$)-ன் இயங்கு வழியானது படம் 16 (ஆ)-ல் காட்டியுள்ளபடி இருக்கும்.

5. குறிப்பு 4-ல் $\phi = \frac{\pi}{2}$ எனில் P ($z$)-ன் இயங்கு வழியானது $\angle QPR = \frac{\pi}{2}$ ஆகவுள்ள QPR என்ற அரை வட்டமாகும்.

**சில முக்கிய இயங்கு வழிகள்** (Some Important Loci)

**3-17.1.** A ($z_1$) ஒரு நிலையான புள்ளி, P ($z$) ஒரு நகரும் புள்ளி, $|z - z_1| = c$ (ஒரு அலை எண்) எனில், P($z$)-ன் இயங்கு வழியைக் (Locus) காணல்

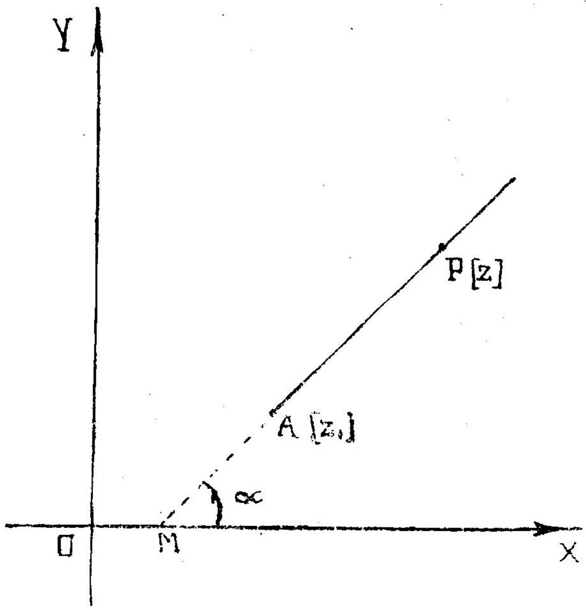



படம் 17

படம் 17 ல், $\overrightarrow{AP} = z - z_1$

$\therefore$ AP $= |z - z_1| = c$ [ஒரு நிலை எண் (constant)]. எனவே, P-ன் இயங்கு வழி A ஐ மையமாகவும், c ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம்.

**3-17.2.** A ($z_1$) **ஒரு நிலையான புள்ளி, P** ($z$) **ஒரு நகரும் புள்ளி, வீச்சு** $(z - z_1) = \alpha$ **(ஒரு நிலையான கோணம்) எனில், P** ($z$)**-ன் இயங்கு வழியைக் காணல்**




படம் 18

படம் 18-ல், $\overrightarrow{AP} = z - z_1$

OX ஐ M-ல் சந்திக்கும்படி PA ஐ நீட்டினால்,

$\angle XMP =$ வீச்சு $\overrightarrow{AP}$

$=$ வீச்சு $(z - z_1)$

$= \alpha$ (ஒரு நிலையான கோணம்)

எனவே, P-ன் இயங்கு வழியானது $\angle(AP, OX) = \alpha$ ஆகவுள்ள AP என்ற அரைக் கோடு.

**3-17.3.** A $(z_1)$, B $(z_2)$ **என்பவை நிலையான புள்ளிகள் P $(z)$ ஒரு நகரும் புள்ளி,** $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right| = k$ **(ஒரு நிலை எண்) எனில், P $(z)$-ன் இயங்கு வழியைக் காணல்**

$$\overrightarrow{AP} = z - z_1$$

$$\therefore \quad AP = |z - z_1|$$

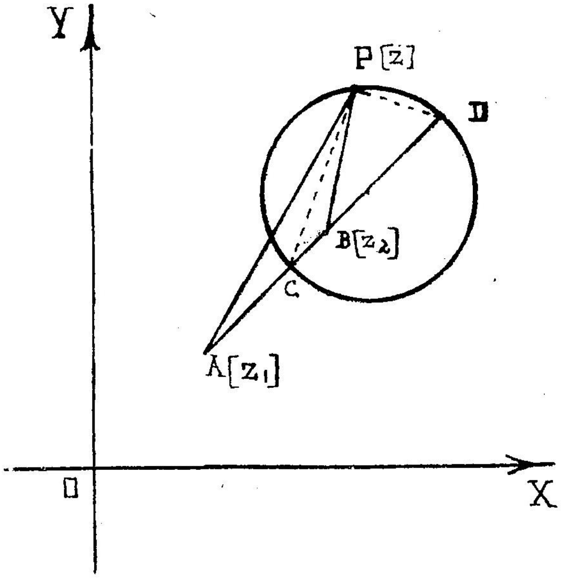
இது மாதிரியே, $BP = |z - z_2|$

கொள்கைப்படி, $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right| = k$ (ஒரு நிலை எண்)

அ - து, $\dfrac{|z-z_1|}{|z-z_2|} k=$

அ - து, $\dfrac{AP}{BP} = k$

**வகை 1.** $k \neq 1$ (படம் 19)




படம் 19

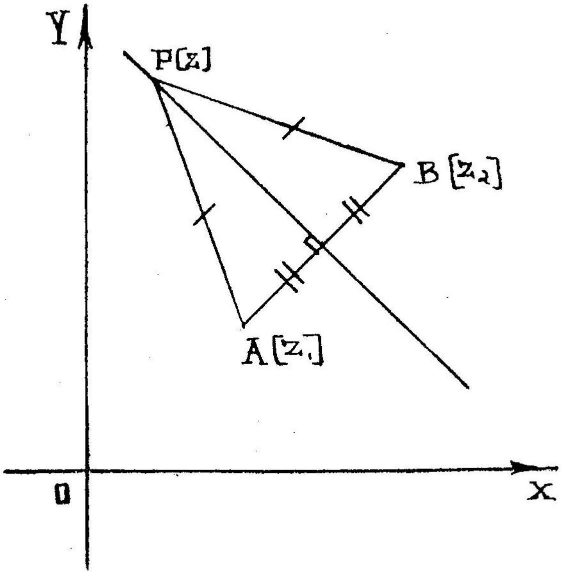
AB ஐ உள்ளேயும், வெளியிலும் k : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும்படி முறையே C, D என்ற புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்.

இப்பொழுது, $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD} = \frac{AP}{BP} = k \neq 1$

மேலும், C, D என்பவை நிலையான புள்ளிகள்.

ஆகவே, நாம் வரை கணிதத்தில் (Geometry) கற்றபடி, P(z)-ன் இயங்கு வழியானது CD ஐ விட்டமாகக் கொண்டு வரையப்படும் அப்பலோனியஸ் வட்டமாகும்.

**வகை 2.** k = 1 (படம் 20)




படம் 20

இங்கே, $\frac{AP}{BP} = k = 1.$

A, B நிலையான புள்ளிகள்.

ஆகவே, நாம் வரை கணிதத்தில் கற்றபடி, P (z)-ன் இயங்கு வழியானது AB-ன் மையக்குத்துக் கோடாகும் (Perpendicular Bisector).

## மாதிரிக் கணக்குகள்

**மாதிரிக் கணக்கு 3-18.1.**

$z_1$, $z_2$ **என்பவை இரு சிக்கல் எண்கள் எனில்,**

$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ **எனக் காட்டுக.**

(செ. ப. 1958 மா.)

சூத்திரம் (84)-ன் படி, $|z_1 + z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$

$z_2$ க்குப் பதில் $-z_2$ ஐ இட,

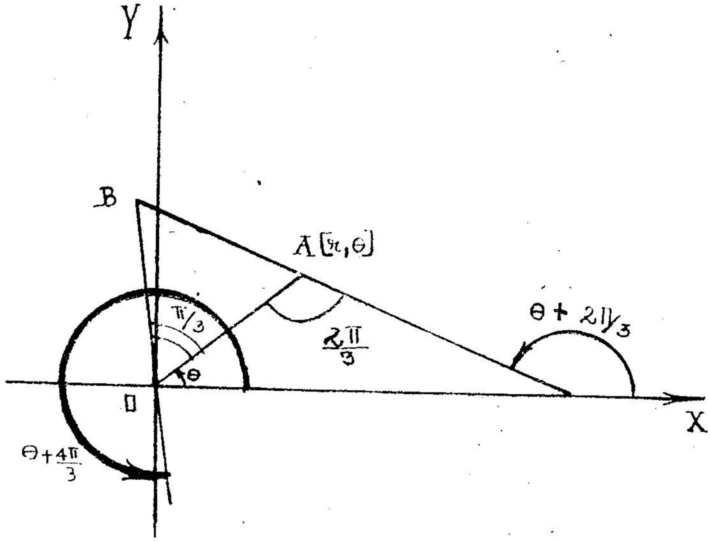
$|z_1 + (-z_2)| \geqslant |z_1| - |-z_2|$

அ - து, $|z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$ $[\because |-z_2| = |z_2|]$

**மாதிரிக் கணக்கு 3-18.2.**

**வரை கணித முறைப்படி,** $(r, \theta) + \left(r, \theta + \frac{2\pi}{3}\right)$

$+ \left(r, \theta + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$ **என நிறுவுக.**




படம் 21

படம் 21-ல், $\overrightarrow{OA} = (r, \theta)$ ஆக இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $OA = r$, $\angle XOA = \theta$.

OAB என்ற சமபக்க முக்கோணத்தை வரைந்தோமானல்,

$$\overrightarrow{AB} = \left(AB.\ \theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \left(r, \theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{BO} = \left( BO,\ \theta + \frac{4\pi}{3} \right)$$

$$= \left( r,\ \theta + \frac{4\pi}{3} \right)$$

இப்பொழுது, $(r,\ \theta) + \left( r,\ \theta + \frac{2\pi}{3} \right) + \left( r,\ \theta + \frac{4\pi}{3} \right)$

$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}$$

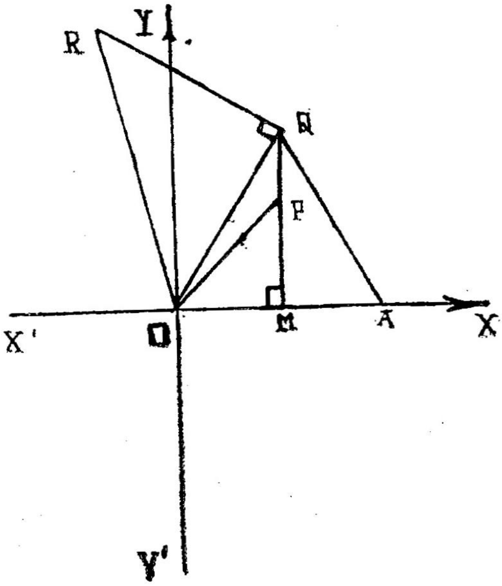
$$= \overrightarrow{OO}$$

$= 0$ (பூச்சியம்)

**மாதிரிக் கணக்கு 3-18.3.**

$1 + i,\ 1 + \sqrt{3}\, i$ **என்ற எண்களையும் அவைகளின் பெருக்குத் தொகையையும் ஆர்கன் வரைபடத்தில் குறிக்க.**

(செ. ப. 1940 பா.)




படம் 22

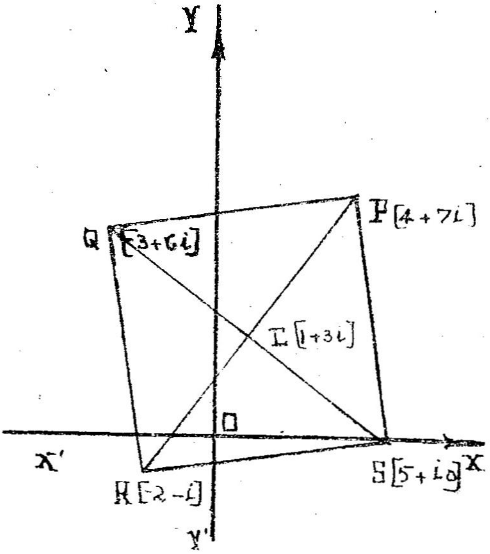
M, A என்ற புள்ளிகள் முறையே 1, 2 என்ற எண்களைக் குறிக்கட்டும் (படம் 22). OAQ என்ற சமபக்க முக்கோணத்தை

வரை. MQ ஐச் சேர். MQ-ல் MP $= OM$ ஆக இருக்கும்படி P என்ற புள்ளியை எடு. இப்பொழுது P, Q என்ற புள்ளிகள் முறையே $1 + i$, $1 + \sqrt{3}\,i$ என்ற எண்களைக் குறிக்கின்றன.

படத்தில் காட்டியபடி $QR = OQ$ ஆகவும், $\angle OQR = \dfrac{\pi}{2}$ ஆகவும் இருக்கும்படி R என்ற புள்ளியைக் குறி. இப்பொழுது $\triangle OQR$ ஆனது $\triangle OMP$-க்கு நேராக வடிவொத்ததாக உள்ளது. எனவே, 3.14.-ன் படி, R என்ற புள்ளி $(1 + i)\,(1 + i\,\sqrt{3}\,)$ என்ற எண்ணைக் குறிக்கிறது.

**மாதிரிக் கணக்கு 3-18.4.**

**ஆர்கன் வரைபடத்திலுள்ள ஒரு சதுரத்தின் மையப் புள்ளியும் ஓர் உச்சியும் முறையே $1 + 3i$, $4 + 7i$ என்ற சிக்கல் எண்களைக் குறிக்கின்றன. மற்ற உச்சிகளைக் குறிக்கும் சிக்கல் எண்களைக் காண்க.**
(செ. ப. 1966 செ.)




படம் 23.

சதுரத்தின் மையப் புள்ளியை C என்றும், கொடுத்துள்ள உச்சியை P என்றும், மீதமுள்ள உச்சிகளை Q, R, S என்றும் எடுத்துக்கொள். C ஐ நிலையாகக் கொண்டு CP ஐ இடஞ்சுழியாக (Anti-clockwise) 90° சுழற்றுவதனுல் கிடைக்கும் P-ன் புதிய இடம் Q ஆகும் (படம் 23.) 3·14-ன் துணை முடிவு 3-ன் படி, Q என்ற புள்ளி

$$1 + 3i + i\,[\,4 + 7i - (1 + 3i)\,]$$

$= 1 + 3i + i\,[3 + 4i]$
$= 1 + 3i + 3i - 4$
$= -3 + 6i$ என்ற எண்ணைக் குறிக்கிறது.

இதுபோல், R என்ற புள்ளி

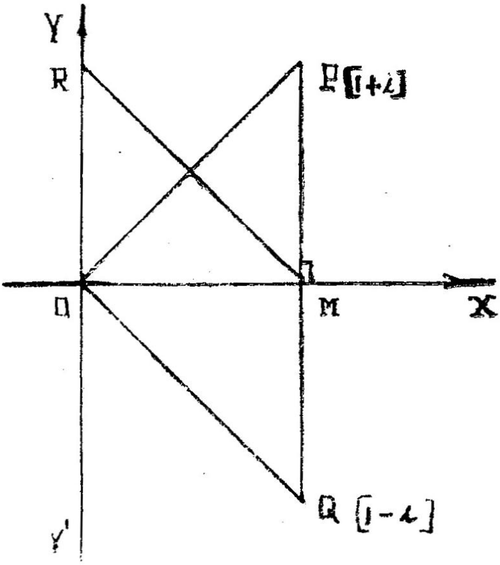
$1 + 3i + i\,[-3 + 6i - (1 + 3i)]$
$= 1 + 3i + i\,[-4 + 3i]$
$= 1 + 3i - 4i - 3$
$= -2 - i$ என்ற எண்ணைக் குறிக்கிறது.

S என்ற புள்ளி

$1 + 3i + i\,[-2 - i - (1 + 3i)]$
$= 1 + 3i + i\,[-2 - i - 1 - 3i]$
$= 1 + 3i + i\,[-3 - 4i]$
$= 1 + 3i - 3i + 4$
$= 5 + i\,.\,0$ என்ற எண்ணைக் குறிக்கிறது.

**மாதிரிக் கணக்கு 3-18.5.**

**ஆர்கன் வரைபடத்தின் துணை கொண்டு** $\dfrac{1+i}{1-i} = i$ **என நிறுவுக.** (செ. ப. 1965 ஏ.)




படம் 24.

M என்ற புள்ளி 1 ஐக் குறிக்கட்டும் (படம் 24). PMQ என்ற நேர்கோட்டை OX-க்குச் செங்குத்தாகவும், MP = 1, MQ = 1 ஆகவும் படத்தில் காட்டியபடி வரை. இப்பொழுது P, Q என்ற புள்ளிகள் முறையே $1 + i$, $1 - i$ என்ற எண்களைக் குறிக்கின்றன. $\triangle OPQ$ ஓர் இரு சமபக்க செங்கோண முக்கோணம் என்பது வெளிப்படை.

Y அச்சில் OR = 1 ஆக இருக்கும்படி R என்ற புள்ளியை எடுத்தால், R ஆனது $i$ ஐக் குறிக்கும். மேலும், $\triangle OMR$ ஓர் இரு சமபக்க செங்கோண முக்கோணம். $\triangle OMR$ ஆனது $\triangle OQP$-க்கு நேராக வடிவொத்ததாக உள்ளது.

எனவே, 3-15-ன் படி, R ஆனது $\frac{1+i}{1-i}$ ஐக் குறிக்கிறது.

$$\therefore \quad \frac{1+i}{1-i} = i$$

**மாதிரிக் கணக்கு 3-18.6.**

**வீச்சு** $\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$ = **வீச்சு** $\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}$ **எனில்,** $z_3$, $z_4$ **என்ற புள்ளிகள்,** $z_1$, $z_2$ **என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டின் ஒரே பக்கத்தில் உள்ளன என்றும்,** $z_1, z_2, z_3, z_4$ **என்ற நான்கு புள்ளிகளும் ஒரு வட்டத்தின் மேலுள்ளன என்றும் நிறுவுக.**

$P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ என்ற புள்ளிகள் முறையே $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ என்ற எண்களைக் குறிக்கட்டும்.

$$\text{வீச்சு } \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \text{வீச்சு } \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} \quad (\text{கொள்கை})$$

$$\therefore \quad \angle P_1 P_3 P_2 = \angle P_1 P_4 P_2$$

இரண்டு கோணங்களின் குறிகளும் (Signs) ஒன்றுகையால், $P_3$-ம், $P_4$-ம் $P_1 P_2$ என்ற நேர்கோட்டின் ஒரே பக்கத்தில் உள்ளன.

இரண்டு கோணங்களும் சமமாகையால், $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ என்ற நான்கு புள்ளிகளும் ஒரு வட்டத்தின் மேலுள்ளன.

**மாதிரிக் கணக்கு 3-18.7.**

$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 = 0$ **எனில்,** A $(z_1)$, B $(z_2)$, C $(z_3)$ **என்ற புள்ளிகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகள் என நிறுவுக.**

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 = 0 \quad (\text{கொள்கை})$$

அ-து, $z_1 z_2 - z_1^2 - z_2^2 = z_3^2 - z_2 z_3 - z_3 z_1$

$\therefore \quad z_1 z_2 - z_1^2 - z_2^2 + z_1 z_2 = z_1 z_2 + z_3^2 - z_2 z_3 - z_3 z_1$

அ-து, $(z_1 - z_2)(z_2 - z_1) = (z_1 - z_3)(z_2 - z_3)$

அ-து, $\dfrac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} = \dfrac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}$

$\therefore$ வீச்சு $\dfrac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}$ = வீச்சு $\dfrac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}$

அதாவது, $\angle BAC = \angle CBA$

இதேபோல், $\angle BAC = \angle ACB$

எனவே, $\angle BAC = \angle CBA = \angle ACB$

$\therefore$ ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணம்.

**மாதிரிக் கணக்கு 3-18.8.**

A($\alpha$), B($\beta$) என்பவை இரு நிலையான சிக்கல் **எண்கள்**; $t$ ஒரு மெய்யான சாரா மாறி (Real Parameter). $z = \alpha + t(\beta - \alpha)$ **எனில், P($z$)-ன் இயங்கு வழியை விவரி.** (செ. ப. 1968 ஏ.)

$z = \alpha + t(\beta - \alpha)$ (கொள்கை)

அ - து, $\dfrac{z - \alpha}{\beta - \alpha} = t$ (ஒரு மெய்யான சாரா மாறி)

$\therefore$ வீச்சு $\dfrac{z - \alpha}{\beta - \alpha}$ = வீச்சு $t$

= 0 அல்லது $\pi$

[சூத்திரங்கள் (77), (78) ன் படி]

ஆனல் வீச்சு $\dfrac{z - \alpha}{\beta - \alpha} = \angle BAP$

$\therefore \quad \angle BAP = 0$ அல்லது $\pi$

$\therefore$ A, B, P என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர் கோட்டில் உள்ளன. எனவே, P($z$)-ன் இயங்கு வழியானது AB என்ற நேர் கோடு ஆகும்.

**மாதிரிக் கணக்கு 3-18.9.**

**ஆர்கன் வரைபடத்தில் P, Q என்ற புள்ளிகள் முறையே $z$, $5z + 3 + 2i$ என்ற எண்களைக் குறிக்கின்றன. ஆதியை மைய மாகவும், '$a$' ஐ ஆரமாகவும்** கொண்ட வட்டத்தின்மீது P($z$) நகர்ந் **தால், Q-ன் இயங்கு வழியைக்** காண்க.

கொள்கைப்படி, $|z| = a$ ............(i)

$z_1 = 5z + 3 + 2i$ எனில்.

$z_1 - (3 + 2i) = 5z$

$$\therefore \quad | z_1 - (3 + 2i) | = | 5z |$$
$$= 5 | z |$$
$$= 5a \quad [\text{(i)-லிருந்து}]$$

எனவே, $Q(z_1)$-ன் இயங்கு வழியானது $3 + 2i$ ஐ மையமாகவும் '$5a$' ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம்.

**மாதிரிக் கணக்கு 3-8.10.**

**ஆர்கன் வரைபடத்தில் $S(z_1)$, $S'(z_2)$ என்பவை இரு நிலையான புள்ளிகள். '$a$' ஒரு நிலையான நேர் மெய் எண்** (Positive Real Number), $| z - z_1 | + | z - z_2 | = 2a$ **எனில், $P(z)$-ன் இயங்கு வழி என்ன?**

$$| z - z_1 | + | z - z_2 | = 2a \text{ (கொள்கை)}$$

அ-து, $SP + S'P = 2a$ [நிலையான நேர் மெய் எண்]. எனவே, $P(z)$-ன் இயங்கு வழியானது $S, S'$ என்ற புள்ளிகளைக் குவியங்களாகவும் (Foci), $2a$ ஐப் பேரச்சின் (Major Axis) நீளமாகவும் கொண்ட நீள் வட்டம் (Ellipse) ஆகும்.

**மாதிரிக் கணக்கு 3-18.11.**

$z = x + iy$, **வீச்சு** $\dfrac{z-2}{z-6i} = \dfrac{\pi}{2}$ **எனில்**, $P(z)$**-ன் இயங்கு வழி** $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$ **என்ற வட்டம் என நிறுவுக.**

$$\frac{z-2}{z-6i} = \frac{x+iy-2}{x+iy-6i}$$
$$= \frac{(x-2)+iy}{x+i(y-6)}$$
$$= \frac{[x-2+iy]\,[x-i(y-6)]}{[x+i(y-6)]\,[x-i(y-6)]}$$
$$= \frac{x(x-2)+y(y-6)+i[xy-(x-2)(y-6)]}{x^2+(y-6)^2}$$

ஆனால் வீச்சு $\left(\dfrac{z-2}{z-6i}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ (கொள்கை)

எனவே, மெ $\left(\dfrac{z-2}{z-6i}\right) = 0$ [சூத்திரம் (79)-ன் படி]

$$\therefore \quad x(x-2) + y(y-6) = 0$$

அ-து, $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$

எனவே, $P(z)$-ன் இயங்கு வழி $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$ என்ற வட்டமாகும்.

**மாற்று முறை :**

Q, R என்ற புள்ளிகள் முறையே $6i = 0 + 6i$, $2 = 2 + i \,.\, 0$ என்ற எண்களைக் குறிக்கட்டும்.

$$\text{வீச்சு } \frac{z-2}{z-6i} = \frac{\pi}{2} \quad \text{(கொள்கை)}$$

எனவே, 3·16-ன் குறிப்பு 5-ன்படி, P($z$)-ன் இயங்கு வழியானது QR ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம். ஆகவே, அதன் சமன்பாடு $x(x-2) + (y-6)y = 0$ ஆகும்.

அதாவது $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$

**மாதிரிக் கணக்கு 3-18.12.**

**$z$, $z_1$ என்ற சிக்கல் எண்கள், $z_1 = \frac{2+z}{2-z}$ ஆக இருக்கும்படி சம்பந்தப்பட்டுள்ளன. P ($z$)-ன் இயங்கு வழி $y$ அச்சு எனில் Q ($z_1$)-ன் இயங்கு வழி என்ன ?**

$z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$ என இருக்கட்டும்.

கொள்கைப்படி, P ($z$)-ன் இயங்கு வழி $y$ அச்சு ஆகும்.

எனவே. $x = 0 \quad \therefore \quad z = iy$ ..................... (i)

$$x_1 + iy_1 = z_1 = \frac{2+z}{2-z} \text{ (கொள்கை)}$$

$$= \frac{2+iy}{2-iy} \text{ [ (i)-லிருந்து ]}$$

$$= \frac{(2+iy)\,(2+iy)}{(2-iy)\,(2+iy)}$$

$$= \frac{4-y^2+4iy}{4+y^2}$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{4-y^2}{4+y^2}, \quad y_1 = \frac{4y}{4+y^2}$$

இப்பொழுது, $$x_1^2 + y_1^2 = \frac{(4-y^2)^2 + 16y^2}{(4+y^2)^2}$$

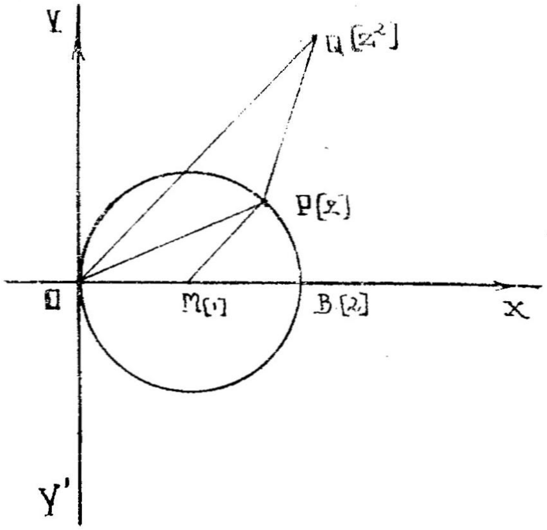
$$= \frac{(4+y^2)^2}{(4+y^2)^2}$$

$$= 1$$

எனவே, Q ($x_1$, $y_1$)-ன் இயங்கு வழியானது ஆதியை மையமாகவும், 1 ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டமாகும்.

**மாதிரிக் கணக்கு 3-18.13.**

**ஆர்கன் வரை படத்தில் B, P, Q என்ற புள்ளிகள் முறையே 2, $z$, $z^2$ என்ற எண்களைக் குறிக்கின்றன. OB ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் மீது P நகர்ந்தால், Q-ன் இயங்கு வழி என்ன ?**




படம் 25

$(r, \theta)$ என்பவை, Q $(z^2)$-ன் கோண தூரக் கூறுகள் (Polar Coordinates) எனில்,

$$r = OQ, \quad \theta = \angle XOQ \quad (\text{படம் } 25)$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள வட்டத்தின் மையம் M எனில், M ஆனது 1 ஐக் குறிக்கிறது.

$$\therefore \quad OM = 1$$

$z$ ஐ $z$ ஆல் பெருக்க $z^2$ கிடைக்கிறது.

எனவே, 3.14-ன் படி, $\triangle$OMP ஆனது $\triangle$ OPQ-க்கு நேராக வடிவொத்ததாக உள்ளது.

$$\therefore \quad \frac{OP}{OM} = \frac{OQ}{OP}$$

$$\therefore \quad OP^2 = OM \cdot OQ = OQ = r$$

$$\therefore \quad OP = \sqrt{r}$$

மேலும், $\angle XOP = \angle POQ = \frac{1}{2} \angle XOQ = \frac{\theta}{2}$

செங்கோண முக்கோணம் OBP-ல்,

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{OP}{OB} = \frac{\sqrt{r}}{2}$$

$$\therefore \quad \sqrt{r} = 2 \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \quad r = 4 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

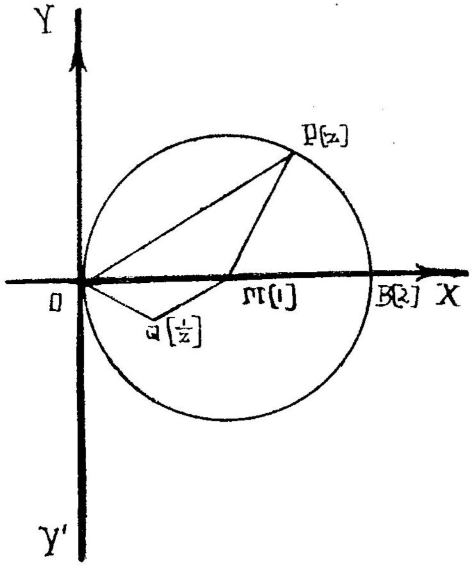
$$= 2 (1 + \cos \theta)$$

இது ஓர் இதயவுருவின் (Cardioid) கோணதூரச் சமன்பாடாகும் (Polar Equation).

எனவே, Q ($z$) ன் இயங்கு வழி ஓர் இதயவுரு ஆகும்.

**மாதிரிக் கணக்கு 3-18.14.**

**ஆர்கன் வரை படத்தில் B, P, Q என்ற புள்ளிகள் முறையே 2, $z$, $\frac{1}{z}$ என்ற எண்களைக் குறிக்கின்றன. OB ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் மீது P ($z$) நகர்ந்தால், Q $\left(\frac{1}{z}\right)$-ன் இயங்கு வழியைக் காண்க.**




படம் 26

கொடுக்கப்பட்டுள்ள வட்டத்தின் மையம் M எனில், M ஆனது 1 ஐக் குறிக்கிறது.

$$\therefore \quad OM = 1.$$

1 ஐ $z$ ஆல் வகுக்க $\frac{1}{z}$ கிடைக்கிறது. Q ஆனது $\frac{1}{z}$ ஐக் குறிப்பதால், 3.15-ன் படி, $\triangle$ OMQ ஆனது $\triangle$ OPM-க்கு நேராக வடிவொத்ததாக உள்ளது.

$$\therefore \quad \frac{OQ}{MQ} = \frac{OM}{PM} = 1$$

$$\therefore \quad OQ = MQ$$

ஆனால் O, M என்பவை நிலையான புள்ளிகள்.

எனவே, Q $\left(\frac{1}{z}\right)$-ன் இயங்கு வழியானது OM-ன் மையக் குத்துக் கோடாகும் (Perpendicular Bisector).

## பயிற்சி 3 (இ)

1. $z_1, z_2$ என்பவை எவையேனும் இரண்டு சிக்கல் எண்கள் எனில், வரை கணித முறைப்படி, $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ என நிறுவுக. இம்முடிவு சமன்பாடாக இருக்க நிபந்தனை (Condition) யாது? (ம. ப. 1968 ஏ.)

2. $z_1, z_2$ என்பவை எவையேனும் இரண்டு சிக்கல் எண்கள் எனில்,

   (i) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

   (ii) $|z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$ என நிறுவுக.

   (செ. ப. 1958 மா.)

3. $z_1, z_2, z_3$ என்பவை மூன்று சிக்கல் எண்கள் எனில், $|z_1 - z_2|^2 \geqslant [\,|z_1 - z_3| - |z_2 - z_3|\,]^2$ என நிறுவுக. சமனின்மை (Inequality) எப்பொழுது பொருந்தும்? (செ. ப. 1955 மா.)

4. வரை கணித முறைப்படி.

$$(r, \theta) + \left(r, \theta + \frac{2\pi}{n}\right) + \left(r, \theta + \frac{4\pi}{n}\right) + \ldots n \text{ உறுப்புகள்} = 0$$

என நிறுவுக.

5. வரை கணித முறைப்படி $z_1$, $z_2$ என்ற சிக்கல் எண்களின் பெருக்குத் தொகையைக் காண்க. $(2+i)(1+i)$-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடித்து அம்முறையை விளக்குக. (செ. ப. 1961 செ.)

6. $(1+i)$, $(1-i)$ என்ற எண்களையும் அவற்றின் பெருக்குத் தொகையையும் ஆர்கன் வரைபடத்தில் குறிக்க. இதன் மூலம் $(1+i)(1-i)=2$ எனக் காட்டுக.

7. இரண்டு சிக்கல் எண்களின் பெருக்குத் தொகையை அடைவதற்குரிய வரை கணித முறையைப் பயன்படுத்தி, $(1+i\sqrt{3})^2$ என்ற புள்ளியைக் குறிக்க. இதன் மூலம் $(1+i\sqrt{3})^2$-ன் மட்டையும், வீச்சையும் (வீச்சத்தையும்) காண்க.

8. ஆர்கன் வரைபடத்தில் $2+3i$, $1+i$ என்ற புள்ளிகளைக் குறிக்க. வரை கணித முறைப்படி அவற்றின் பெருக்குத் தொகையைக் காண்க. ஆதியை மையமாக (About O) அந்த இரண்டு புள்ளிகளையும் இடஞ்சுழியாக (Anti-clockwise) 90° சுழற்றுவதால் கிடைக்கும் புதிய புள்ளிகள் இரண்டும் குறிக்கும் சிக்கல் எண்கள் யாவை ? (ம. ப. 1968 செ.)

9. ஆர்கன் வரைபடத்திலுள்ள ஒரு சதுரத்தின் மையப் புள்ளியும் ஓர் உச்சியும் முறையே $2-i$, $4+i$ என்ற எண்களைக் குறிக்கின்றன. மற்ற உச்சிகள் குறிக்கும் சிக்கல் எண்களைக் காண்க.

10. ஒரு சதுரத்தின் மையப் புள்ளி $2-i$, ஓர் உச்சி $-1+i$, மற்ற உச்சிகள் குறிக்கும் எண்களைக் காண்க. (செ. ப. 1945 மா.)

11. ABCD என்ற சதுரத்தின் உச்சிகள் A, B, C, D கொடுக்கப் பட்டுள்ள வரிசைப்படி இடஞ்சுழியாக அமைந்துள்ளன. A, B முறையே $-1+4i$, $-3$ என்ற எண்களைக் குறித்தால், மற்ற உச்சிகள், மையம் ஆகிய புள்ளிகள் குறிக்கும் சிக்கல் எண்கள் யாவை ?

12. $x, y, a, b$ என்பவை மெய் எண்கள். ஆர்கன் வரைபடத்தில் $x+iy$, $a+ib$ என்ற புள்ளிகள் கொடுக்கப்பட்டால், $\dfrac{x+iy}{a+ib}$ என்ற புள்ளியை எப்படி அடையலாம் எனக் காட்டுக.

ஆர்கன் வரைபடத்தின் உதவியுடன், $\dfrac{1+i}{1-i}=i$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1965 ஏ.)

13. வரை கணித முறைப்படி $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$-ன் மதிப்பைக்காண்க.

14. $-10+10i, 1+3i$ என்ற புள்ளிகளை ஆர்கன் வரைபடத்தில் குறிக்க. $\frac{-10+10i}{1+3i}$ என்ற ஈவை அடைவதற்குரிய வரை கணித அமைப்பு (Geometrical construction) முறையைத் தருக. அந்த ஈவின் மட்டு யாது ? (செ. ப. 1946 மா.)

15. A, B, C என்ற புள்ளிகள் முறையே $z_1, z_2, z_3$ என்ற சிக்கல் எண்களைக் குறித்தால், வீச்சு $\left(\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}\right) = \angle$ CBA எனக் காட்டுக. $\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}$ ஒரு மெய் எண் எனில், மேலே நிரூபித்த முடிவைப் பயன்படுத்தி A, B, C என்பவை ஒரு நேர் கோட்டில் உள்ளன என நிறுவுக. இதன் மூலம் $5+8i, 13+20i, 19+29i$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு நேர் கோட்டில் உள்ளன என நிரூபிக்க.

16. வீச்சு $\left[\frac{(z_2-z_3)(z_1-z_4)}{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}\right] = \pi$ எனில், $z_1, z_2, z_3, z_4$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்தின் மேல் உள்ளன என நிறுவுக.

17. வீச்சு $\left[\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}\right] = 0$ எனில், $z_1, z_2, z_3, z_4$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்தின் மேல் உள்ளன அல்லது ஒரு நேர் கோட்டில் உள்ளன என நிறுவுக.

18. $t$ ஒரு மெய்யான சாரா மாறி (Real Parameter). $z = 4t + 3i(1-t)$ எனில், ஆர்கன் வரைபடத்தில் $z$-ன் இயங்கு வழி (Locus) ஒரு நேர் கோடு எனக் காட்டுக.

19. $z_1, z_2$ என்பவை இரு நிலையான சிக்கல் எண்கள். $t$ ஒரு மெய்யான சாரா மாறி (Real Parameter). $z = z_1 + z_2 t$ எனில் P ($z$)-ன் இயங்கு வழியைக் காண்க.

20. வீச்சு $\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{2}$ எனில், P ($z$)-ன் இயங்கு வழி யாது?

21. வீச்சு $\left(\frac{z-3i}{z-3}\right) = \frac{\pi}{3}$ எனில், P ($z$)-ன் இயங்கு வழி யாது?

22. இரண்டு நிலையான புள்ளிகள் A, B; ஒரு நகரும் புள்ளி P முறையே $\alpha$, $\beta$, $z$ என்ற சிக்கல் எண்களைக் குறிக்கின்றன. கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளிலிருந்து P($z$)-ன் இயங்கு வழிகளைக் (Loci) காண்க.

(i) வீச்சு $(z - \alpha) =$ வீச்சு $\beta$

(ii) வீச்சு $(z - \alpha) -$ வீச்சு $(z - \beta) = \frac{\pi}{6}$

23. ஆர்கன் வரைபடத்தில் P என்ற புள்ளி $z = x + iy$ என்ற சிக்கல் எண்ணைக் குறிக்கிறது. $|z - 4 + 5i| = 9$ எனில், P($z$)-ன் இயங்கு வழி ஒரு வட்டம் எனக் காட்டுக. அவ்வட்டத்தின் மையம் குறிக்கும் சிக்கல் எண் யாது? (செ. ப. 1970 ஏ.)

24. ஆர்கன் வரைபடத்தில் P என்ற புள்ளி $z$ என்ற சிக்கல் எண்ணைக் குறிக்கிறது. கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளிலிருந்து P($z$)-ன் இயங்கு வழிகளைக் காண்க.

(i) வீச்சு $z = \frac{\pi}{4}$

(ii) $|z - 2 - 3i| = 10$ (செ, ப. 1947 செ.)

25. $|2z - 4 + 6i| = 10$ எனில், P($z$)-ன் இயங்கு வழி யாது?

26. $|z - 2 - 3i| + |z - 5 + i| = 10$ எனில், P($z$)-ன் இயங்கு வழி யாது?

27. $\left|\frac{z - 1}{z - i}\right| = 1$ எனில், P($z$)-ன் இயங்கு வழி யாது?

(செ. ப. 1965 ஏ.)
(செ. ப. 1967 ஏ.)

28. $z$, $\alpha$, $\beta$ என்ற சிக்கல் எண்களில், முதல் எண் ஒரு மாறி (Variable); மற்றவை இரண்டும் நிலை எண்கள். கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளிலிருந்து P($z$)-ன் இயங்கு வழிகளைக் காண்க.

(i) $|z - \alpha| = |z - \beta|$

(ii) $|z - \alpha| = |\beta|$ (செ. ப. 1966 ஏ.)

29. $\left|\frac{z - 1}{z + 1}\right| = 2$ எனில், $z$ என்ற புள்ளி $x^2 + y^2 + \frac{10}{3}x + 1 = 0$ என்ற வட்டத்தின் மீது உள்ளது என நிரூபிக்க.

30. $|2z-1| = |z-2|$ எனில், P ($z$)-ன் இயங்கு வழி ஒரு வட்டம் என நிறுவுக.

31. ஆர்கன் வரைபடத்தில் P என்ற புள்ளி $z$ என்ற சிக்கல் எண்ணைக் குறிக்கிறது. $2|z-2i| = |z-2|$ எனில், **P (z)-ன்** இயங்கு வழி ஒரு வட்டம் என நிறுவுக. அவ்வட்டத்தின் மையம் குறிக்கும் சிக்கல் எண் யாது? (செ. ப. 1965 செ.)

32. A ($\alpha$), B ($\beta$) என்பவை இரண்டு நிலையான புள்ளிகள். கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளிலிருந்து P ($z$)-ன் இயங்கு வழிகளைக் காண்க.

(i) $|z-\alpha| = \frac{3}{4}|z-\beta|$

(ii) வீச்சு $(z-\alpha) = \frac{\pi}{3}$

33. A, B என்பவை இரண்டு நிலையான புள்ளிகள். $|z^2-1| = 2$ எனில், P ($z$) என்ற புள்ளி PA . PB என்பது ஒரு நிலை எண்ணுக்குச் சமமாக இருக்கும்படி நகர்கிறது என நிறுவுக. (செ. ப. 1962.)

34. $z$ என்ற புள்ளி $|z| = 1$ என்ற வட்டத்தின் மீது நகர்ந்தால், $\frac{2}{z}$ என்ற புள்ளியின் இயங்கு வழியைக் காண்க.

35. ஆர்கன் வரைபடத்தில் P, Q என்ற புள்ளிகள் முறையே $z$, $2z+3+i$ என்ற எண்களைக் குறிக்கின்றன. P ($z$)-ன் இயங்கு வழியானது ஆதியை மையமாகவும், 'k' ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம் எனில். Q-ன் இயங்கு வழி யாது ?

36. மெ $\left(\frac{z+1}{z+i}\right) = 1$ எனில், P ($z$)-ன் இயங்கு வழி $x-y=1$ என்ற நேர் கோடு எனக் காட்டுக.

37. $\frac{z-i}{z-1}$ ஆனது முழுவதுமே கற்பனையாகில், $z$ என்ற புள்ளி $\frac{1}{2}(1+i)$ ஐ மையமாகவும், $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டத்தின் மேல் உள்ளது என நிரூபிக்க.

38. $z$ ஒரு சிக்கல் எண், $a$ ஒரு நிலையான மெய் எண். $\frac{z-a}{z+a}$ ஆனது முழுவதுமே கற்பனையாகில். ஆர்கன் வரைபடத்தில்

உள்ள $z$ என்ற புள்ளியானது $+a, -a$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் மேல் உள்ளது என நிறுவுக.

39. $\dfrac{z-1}{z-i}$ -ன் வீச்சின் (வீச்சத்தின்) முதன் மதிப்பு $\dfrac{\pi}{4}$ எனில், P($z$)-ன் இயங்கு வழி $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ என நிறுவுக.

40. A, B என்ற புள்ளிகள் $z_1, z_2$ என்ற எண்களைக் குறித்தால், $2z\bar{z} - (\bar{z}_1+\bar{z}_2)\, z - (z_1 + z_2)\, \bar{z} + (z_1\, \bar{z}_2+\bar{z}_1\, z_2) = 0$ என்பது AB ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு என நிரூபிக்க.

## விடைகள்

8. $-3 + 2i,\ -1 + i.$

9. $i,\ -3i,\ 4 - 3i.$

10. $5 - 3i,\ 4 + 2i,\ -4i.$

11. $1 - 2i,\ 3 + 2i,\ i.$

19. $z_1,\ z_1 + z_2$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோடு.

20. Q, R என்ற புள்ளிகள் முறையே $-1, 1$ என்ற எண்களைக் குறித்தால், P($z$)-ன் இயங்கு வழியானது $\angle QPR = \dfrac{\pi}{2}$ ஆகவுள்ள QPR என்ற அரை வட்டமாகும்.

21. Q, R என்பவை முறையே $3, 3i$ என்ற எண்களைக் குறித்தால், P($z$)-ன் இயங்கு வழியானது $\angle QPR = \dfrac{\pi}{3}$ ஆகவுள்ள QPR என்ற வட்ட வில்லாகும்.

22. (i) $\angle$(AP, OX) = வீச்சு $\beta$ ஆகவுள்ள AP என்ற அரைக் கோடு.

(ii) $\angle BPA = \dfrac{\pi}{6}$ ஆகவுள்ள BPA என்ற வட்ட வில்.

23. $4 - 5i.$

24 (i) $\angle XOP = \dfrac{\pi}{4}$ ஆகவுள்ள OP என்ற அரைக் கோடு

(ii) $2 + 3i$ ஐ மையமாகவும், 10 ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம்.

25. $2-3i$ ஐ மையமாகவும், 5 ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம்.

26. $2+3i$, $5-i$ என்ற புள்ளிகளைக் குவியங்களாகவும் (Foci), 10 ஐப் பேரச்சின் நீளமாகவும் (Length of the **Major** Axis) கொண்ட நீள் வட்டம் (Ellipse).

27. $y=x$ என்ற நேர் கோடு.

28. (i) $\alpha$, $\beta$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர் கோட்டின் மையக் குத்துக் கோடு

(ii) $\alpha$ ஐ மையமாகவும், $|\beta|$ ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம்.

31. $-\frac{2}{3}(1-4i)$

32. (i) AB ஐ உள்ளேயும் வெளியிலும் 3 : 4 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம்.

(ii) நேர் $x$ அச்சுடன் (Positive x axis) $\frac{\pi}{3}$ என்ற கோணத்தைச் சாய்வாகக் (Inclination) கொண்ட AP என்ற அரைக் கோடு.

34. $x^2+y^2=4$ என்ற வட்டம்.

35. $3+i$ ஐ மையமாகவும், 2k ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம்.

# 4. டிமாவியரின் தேற்றமும் அதன் உடனடிப் பயன்களும்

## (De Moivre's Theorem and its Immediate Applications)

**4.1. டிமாவியரின் தேற்றம்** (De Moivre's Theorem) : $n$ ஒரு முழு எண் (Integer) எனில், $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$; $n$ ஒரு விகிதமுறு பின்னம் (Rational Fraction) எனில், $\cos n\theta + i\sin n\theta$ என்பது $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$-ன் ஒரு மதிப்பாகும்.

**நிறுவல் :**

**வகை 1.**

$n$ என்பது ஒரு நேர் முழு எண் (**Positive Integer**)

$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$= (\cos\theta_1 . \cos\theta_2 - \sin\theta_1 . \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 . \cos\theta_2 + \cos\theta_1 . \sin\theta_2)$$

$$= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2) \quad \dots\dots\dots\dots \text{(i)}$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad \dots\dots\dots\dots \text{(ii)}$$

என்பது $n = m$ (ஒரு குறிப்பிட்ட நேர் முழு எண்) ஆக இருக்கும் போது உண்மையானது என்று வைத்துக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^m = \cos m\theta + i\sin m\theta \dots\dots\dots\dots \text{(iii)}$$

இப்பொழுது,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{m+1}$$
$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^m . (\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= (\cos m\theta + i\sin m\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \text{[ (iii)-லிருந்து ]}$$
$$= \cos(m\theta + \theta) + i\sin(m\theta + \theta) \qquad \text{[ (i)-லிருந்து ]}$$
$$= \cos(m+1)\theta + i\sin(m+1)\theta$$

எனவே, $n = m$ ஆக இருக்கும்போது (ii) உண்மையானது என்றால், $n = m+1$ ஆக இருக்கும்போதும் (ii) உண்மையாகும்.
ஆனால், $(\cos\theta + i\sin\theta)^1 = \cos 1\,\theta + i\sin 1\,\theta$.

எனவே, $n = 1$ ஆக இருக்கும்போது (ii) உண்மையானது ஆகவே, $n = 1 + 1 = 2$ ஆக இருக்கும்போதும், எனவே $n = 2 + 1 = 3$ ஆக இருக்கும்போதும், இதேபோல் $n = 4, 5, 6, \ldots\ldots$ ஆக இருக்கும்போதும் (ii) உண்மையாகும். அதாவது, $n$ எந்த ஒரு நேர் முழு எண் என்றாலும், (ii) உண்மையாகும்.

**வகை 2.**

$n$ என்பது ஓர் எதிர் முழு எண் (Negative integer).

$n = -m$ என இருக்கட்டும். எனவே $m$ ஒரு நேர் முழு எண். இப்பொழுது,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-m}$$
$$= \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^m}$$
$$= \frac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta} \qquad \text{[வகை 1-லிருந்து]}$$
$$= \frac{\cos m\theta - i\sin m\theta}{(\cos m\theta + i\sin m\theta)(\cos m\theta - i\sin m\theta)}$$
$$= \frac{\cos m\theta - i\sin m\theta}{\cos^2 m\theta + i\sin^2 m\theta}$$
$$= \cos m\theta - i\sin m\theta$$
$$= \cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta)$$
$$= \cos n\theta + i\sin n\theta$$

**வகை 3.**

$n$ என்பது ஒரு விகிதமுறு பின்னம் (Rational Fraction).

$n = \frac{p}{q}$, $q$ ஒரு நேர் முழு எண், $p$ ஒரு முழு எண் என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது,

$$\left(\cos \frac{p}{q}\theta + i\sin\frac{p}{q}\theta\right)^q$$

$$= \cos\left(q.\frac{p}{q}\theta\right) + i\sin\left(q.\frac{p}{q}\theta\right) \quad \text{[வகை 1-லிருந்து]}$$

$$= \cos p\theta + i\sin p\theta$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^p \quad \text{[வகை 1 அல்லது 2-லிருந்து!}$$

$\therefore \cos\frac{p}{q}\theta + i\sin\frac{p}{q}\theta$ என்பது $(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}$ -ன் ஒரு மதிப்பாகும்.

அதாவது,

$\cos n\theta + i\sin n\theta$ என்பது $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ -ன் ஒரு மதிப்பாகும்.

**குறிப்பு :**

1. $n$ ஒரு முழு எண் எனில்,

$$(\cos\theta - i\sin\theta)^n = [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]^n$$
$$= \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)$$
$$= \cos n\theta - i\sin n\theta$$

$n$ ஒரு விகிதமுறு பின்னம் எனில்,

$\cos n\theta - i\sin n\theta = (\cos\theta - i\sin\theta)^n$ -ன் ஒரு மதிப்பு.

2. $n$ ஒரு முழு எண் எனில்,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)$$
$$= \cos n\theta - i\sin n\theta$$

$n$ ஒரு விகிதமுறு பின்னம் எனில்,

$\cos n\theta - i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-n}$ -ன் ஒரு மதிப்பு.

3. $n$ ஒரு முழு எண் எனில்,

$$(\cos\theta - i\sin\theta)^{-n} = [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]^{-n}$$
$$= \cos n\theta + i\sin n\theta$$

$n$ ஒரு விகிதமுறு பின்னம் எனில்,

$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta - i\sin\theta)^{-n}$ -ன் ஒரு மதிப்பு.

4. $n$ ஒரு முழு எண் எனில்,

$$(\sin\theta + i\cos\theta)^n = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]^n$$

$$= \cos n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$n$ ஒரு விகிதமுறு பின்னம் எனில்,

$$\cos n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$= (\sin\theta + i\cos\theta)^n$ -ன் ஒரு மதிப்பு.

5. $n$ ஒரு முழு எண் எனில்,

$$(\sin\theta - i\cos\theta)^n = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]^n$$

$$= \cos n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - i\sin n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$n$ ஒரு விகிதமுறு பின்னம் எனில்,

$\cos n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - i\sin n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = (\sin\theta - i\cos\theta)^n$ -ன் ஒரு மதிப்பு.

6. $\cos\theta + i\sin\theta$ ஐ $\text{cis}\,\theta$ எனக் குறிப்பது வழக்கம். இந்தக் குறியீட்டின்படி, $n$ ஒரு நேர் முழு எண் எனில், $(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \ldots\ldots\ldots (\cos\theta_n + i\sin\theta_n) = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots\ldots\ldots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots\ldots\ldots + \theta_n)$ என்ற முடிவை,

$$\text{cis}\,\theta_1 \cdot \text{cis}\,\theta_2 \ldots\ldots\ldots \cdot \text{cis}\,\theta_n = \text{cis}\,(\theta_1 + \theta_2 + \ldots\ldots\ldots + \theta_n)$$

என்று சுருக்கமாக எழுதலாம்.

7. $\text{cis}\,\theta = \cos\theta + i\sin\theta$

$$\text{cis}\,(-\theta) = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

எனவே, $\text{cis}\,\theta$, $\text{cis}\,(-\theta)$ என்பவை இணைச் சிக்கல் எண்கள். இதேபோல், $\text{cis}\,n\theta$, $\text{cis}\,(-n\theta)$ என்பவைகளும் இணைச் சிக்கல் எண்கள்.

8. $\text{cis}\,\theta \cdot \text{cis}\,(-\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

எனவே, $\text{cis}\,\theta$, $\text{cis}\,(-\theta)$ என்பவற்றுள், ஒன்று மற்றதன் தலைகீழானது (Reciprocal). இதேபோல், $\text{cis}\,n\theta$. $\text{cis}\,(-n\theta)$ என்பவற்றுள், ஒன்று மற்றதன் தலைகீழானது.

9. $n$ ஒரு முழு எண் எனில், $(\text{cis}\,\theta)^n = \text{cis}\,n\theta$,
$n$ ஒரு விகிதமுறு பின்னம் எனில், $\text{cis}\,n\theta = (\text{cis}\,\theta)^n$-ன் ஒரு மதிப்பு என்பது டிமாவியரின் தேற்றம்.

## மாதிரிக் கணக்குகள்

**மாதிரிக் கணக்கு 4-2.1.**

$x_r = \cos\frac{\pi}{2^r} + i\sin\frac{\pi}{2^r}$ எனில்,

$x_1 . x_2 . x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots \infty = -1$ **என நிறுவுக.**

$x_r = \cos\frac{\pi}{2^r} + i\sin\frac{\pi}{2^r} = \text{cis}\frac{\pi}{2^r}$ (கொள்கை)

எனவே,

$$x_1 . x_2 . x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$$

$$= \text{cis}\,\frac{\pi}{2} . \text{cis}\,\frac{\pi}{2^2} . \text{cis}\,\frac{\pi}{2^3} \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$$

$$= \text{cis}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2^2} + \frac{\pi}{2^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty\right]$$

$$= \text{cis}\left[\frac{\frac{\pi}{2}}{1 - \frac{1}{2}}\right]$$

$$= \text{cis}\,\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \text{cis}\,\pi$$
$$= \cos\pi + i\sin\pi$$
$$= -1$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-2.2.**

$(\cos\theta + i\sin\theta)\,(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) \ldots\ldots [\cos(2r-1)\,\theta + i\sin(2r-1)\,\theta] = 1$ **என்ற சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்தும் $\theta$-ன் பொதுக் கோவையைக் காண்க.**

$$(\cos\theta + i\sin\theta)\,(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) \ldots\ldots [\cos(2r-1)\,\theta + i\sin(2r-1)\,\theta] = 1$$

அ-து, $\text{cis}\,\theta . \textbf{cis}\,\mathbf{3\theta} . \text{cis}\,5\theta \ldots\ldots \text{cis}\,(2r-1)\,\theta = 1$

$\therefore \text{cis}\,[\theta + 3\theta + 5\theta + \ldots\ldots + (2r-1)\,\theta] = 1$

$$\therefore \text{cis}\left[\frac{r}{2}\{\theta + (2r-1)\theta\}\right] = 1$$

அ-து, $\text{cis}\left[\frac{r}{2}.\ 2r\theta\right] = 1$

அ-து, $\text{cis}\,(r^2\,\theta) = 1 = \text{cis}\,0$

அ-து, $\cos r^2\,\theta + i \sin r^2\,\theta = \cos 0 + i \sin 0$

$$\therefore \quad \cos r^2\,\theta = \cos 0 \text{ ............ (i)}$$

$$\sin r^2\,\theta = \sin 0 \text{ ............ (ii)}$$

(i)-லிருந்து, $r^2\,\theta = 2n\,\pi$, $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

அ-து. $\theta = \dfrac{2n\,\pi}{r^2}$

(ii)-லிருந்து. $r^2\,\theta = m\,\pi$. $m$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

அ-து. $\theta = \dfrac{m\,\pi}{r^2}$

$\theta$-ன் மதிப்புகள் சமன்பாடுகள் (i)-க்கும். (ii)-க்கும் பொருந்த வேண்டும்.

$\therefore \quad \theta = \dfrac{2n\,\pi}{r^2}$. $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

**மாதிரிக் கணக்கு 4-2.3.**

**சுருக்குக :** $\dfrac{(\cos 2\,\theta - i \sin 2\,\theta)^7 \quad (\cos 3\,\theta + i \sin 3\theta)^{-5}}{(\cos 4\,\theta + i \sin 4\,\theta)^{12} \quad (\cos 5\,\theta - i \sin 5\theta)^{-6}}$

$$\frac{(\cos 2\,\theta - i \sin 2\,\theta)^7 \quad (\cos 3\,\theta + i \sin 3\,\theta)^{-5}}{(\cos 4\,\theta + i \sin 4\,\theta)^{12} \quad (\cos 5\,\theta + i \sin 5\,\theta)^{-6}}$$

$$= \frac{[(\cos\theta + i \sin\theta)^{-2}]^7\ [(\cos\theta + i \sin\theta)^3]^{-5}}{[(\cos\theta + i \sin\theta)^4]^{12}\ [(\cos\theta + i \sin\theta)^{-5}]^{-6}}$$

$$= \frac{(\cos\theta + i \sin\theta)^{-14} \quad (\cos\theta + i \sin\theta)^{-15}}{(\cos\theta + i \sin\theta)^{48} \quad (\cos\theta + i \sin\theta)^{30}}$$

$$= (\cos\theta + i \sin\theta)^{-14-15-48-30}$$

$$= (\cos\theta + i \sin\theta)^{-107}$$

$$= \cos 107\,\theta - i \sin 107\,\theta$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4·2.4.**

$n$ ஒரு நேர் முழு எண் எனில்,

$$\left[\frac{1+\sin\phi+i\cos\phi}{1+\sin\phi-i\cos\phi}\right]^n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}-n\phi\right)+i\sin\left(n\frac{\pi}{2}-n\phi\right)$$

என நிறுவுக. (செ. ப. 1961 செ.)
(செ. ப. 1963 செ.)
(ம. ப. 1970 ஏ.)

$$\frac{1+\sin\phi+i\cos\phi}{1+\sin\phi-i\cos\phi} = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)}$$

$$= \frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta},\quad \theta=\frac{\pi}{2}-\phi$$

$$= \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}+i\,2\sin\frac{\theta}{2}\,.\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}-i\,2\sin\frac{\theta}{2}\,.\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= \left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$$

$= \cos\theta+i\sin\theta$ [டிமாவியரின் தேற்றப்படி]

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)$$

$$\therefore \left[\frac{1+\sin\phi+i\cos\phi}{1+\sin\phi-i\cos\phi}\right]^n = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)\right]^n$$

$$= \cos n\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) + i \sin n\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$$

[டிமாவியரின் தேற்றப்படி]

$$= \cos\left(n\frac{\pi}{2} - n\phi\right) + i \sin\left(n\frac{\pi}{2} - n\phi\right)$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-2.5.**

$n$ ஒரு முழு எண், $x = \cos\theta + i \sin\theta$ எனில்,

$x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta$.

$x - \frac{1}{x} = 2 i \sin\theta$,

$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\theta$,

$x^n - \frac{1}{x^n} = 2 i \sin n\theta$ என நிறுவுக.

கொள்கைப்படி, $x = \cos\theta + i\sin\theta$ ............ (i)

$$\therefore \frac{1}{x} = \cos\theta - i\sin\theta \qquad \text{............ (ii)}$$

(i) ஐயும், (ii) ஐயும் கூட்ட,

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta$$

(i)-லிருந்து (ii) ஐக் கழிக்க,

$$x - \frac{1}{x} = 2 i \sin\theta$$

(i)-லிருந்து, $x^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ ............ (iii)

$$\therefore \frac{1}{x^n} = \cos n\theta - i \sin n\theta \qquad \text{............ (iv)}$$

(iii) ஐயும், (iv) ஐயும் கூட்ட,

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\theta$$

(iii)-லிருந்து (iv) ஐக் கழிக்க,

$$x^n - \frac{1}{x^n} = 2 i \sin n\theta$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-2 6.**

$x = \cos\theta + i\sin\theta$, $\sqrt{1-c^2} = nc - 1$ எனில்.

$1 + c\cos\theta = \dfrac{c}{2n}(1+nx)\left(1+\dfrac{n}{x}\right)$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1952 செ.)
(ம. ப. 1971 ஏ.)

$$\sqrt{1-c^2} = nc - 1 \text{ (கொள்கை)}$$

$$\therefore \quad 1 - c^2 = n^2c^2 - 2nc + 1$$

அ-து, $(n^2+1)c^2 = 2nc$

$$\therefore \quad (n^2+1)c = 2n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

$$x = \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{(கொள்கை)}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\therefore \quad x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

இப்பொழுது,

$$\frac{c}{2n}(1+nx)\left(1+\frac{n}{x}\right) = \frac{c}{2n}\left[1 + n\left(x+\frac{1}{x}\right) + n^2\right]$$

$$= \frac{c}{2n}\left[(n^2+1) + n\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= \frac{c}{2n}\left[(n^2+1) + 2n\cos\theta\right],$$

[(ii)-லிருந்து]

$$= \frac{(n^2+1)c}{2n} + c\cos\theta$$

$$= 1 + c\cos\theta \qquad \text{[(i)-லிருந்து]}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-2.7.**

$x + \dfrac{1}{x} = 2\cos a : y + \dfrac{1}{y} = 2\cos b : z + \dfrac{1}{z} = 2\cos c$ எனில்,

$2\cos(pa + qb + rc) = x^p y^q z^r + \dfrac{1}{x^p y^q z^r}$ -ன் ஒரு மதிப்பு எனக் காட்டுக.

(செ. ப. 1953 செ.)

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos a \text{ (கொள்கை)}$$

அ-து, $x^2 - 2x\cos a + 1 = 0$

$$\therefore \quad x = \frac{2\cos a \pm \sqrt{4\cos^2 a - 4}}{2}$$

$$= \frac{2\cos a \pm \sqrt{-4\sin^2 a}}{2}$$

$$= \frac{2\cos a \pm 2i\sin a}{2}$$

$$= \cos a \pm i\sin a$$

$\therefore \cos a + i\sin a = x$-ன் ஒரு மதிப்பு

இதேபோல், $\cos b + i\sin b = y$ -ன் ஒரு மதிப்பு
$\cos c + i\sin c = z$ -ன் ஒரு மதிப்பு

இப்பொழுது,

$x^p\, y^q\, z^r$ -ன் ஒரு மதிப்பு

$= (\cos pa + i\sin pa)(\cos qb + i\sin qb)(\cos rc + i\sin rc)$

[டிமாவியரின் தேற்றப்படி]

$= \cos(pa + qb + rc) + i\sin(pa + qb + rc)$ ............ (i)

$\therefore \quad \dfrac{1}{x^p\, y^q\, z^r}$ -ன் ஒரு மதிப்பு

$= \cos(pa + qb + rc) - i\sin(pa + qb + rc)$ ............(ii)

(i) ஐயும், (ii) ஐயும் கூட்ட,

$$2\cos(pa + qb + rc) = x^p\, y^q\, z^r + \frac{1}{x^p\, y^q\, z^r} \text{ -ன் ஒரு மதிப்பு.}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-2.8.**

$a$ என்பது $\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$ ஐயும், $b, c, d$ என்பவை இதே போன்ற கோணவகைகளையும் குறித்தால்,

$$\sqrt{\frac{ab}{cd}} - \sqrt{\frac{cd}{ab}} = 2i\sin(\alpha + \beta - \gamma - \delta) \text{ என நிறுவுக.}$$

$$\frac{ab}{cd} = \frac{(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)(\cos 2\beta + i\sin 2\beta)}{(\cos 2\gamma + i\sin 2\gamma)(\cos 2\delta + i\sin 2\delta)}$$

$$= \frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2(\cos\beta + i\sin\beta)^2}{(\cos\gamma + i\sin\gamma)^2(\cos\delta + i\sin\delta)^2}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{ab}{cd}} = \frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta)}{(\cos \gamma + i \sin \gamma)(\cos \delta + i \sin \delta)}$$

$$= \cos(\alpha + \beta - \gamma - \delta) + i \sin(\alpha + \beta - \gamma - \delta) \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

$$\therefore \sqrt{\frac{cd}{ab}} = \cos(\alpha + \beta - \gamma - \delta) - i \sin(\alpha + \beta - \gamma - \delta) \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

(i)-லிருந்து (ii) ஐக் கழிக்க,

$$\sqrt{\frac{ab}{cd}} - \sqrt{\frac{cd}{ab}} = 2i \sin(\alpha + \beta - \gamma - \delta)$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-2.9.**

$n$ ஒரு நேர் முழு எண் எனில்,

$(1 + i\sqrt{3})^n - (1 - i\sqrt{3})^n = i\, 2^{n+1} \sin \frac{n\pi}{3}$ என நிறுவுக.

$1 + i\sqrt{3} = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது. $r \cos\theta = 1, \quad r \sin\theta = \sqrt{3}$

$$\therefore \quad r^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4$$

$$\therefore \quad r = 2$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{1}{2}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

எனவே, $1 + i\sqrt{3} = 2\left[\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right]$

$$1 - i\sqrt{3} = 2\left[\cos\frac{\pi}{3} - i \sin\frac{\pi}{3}\right]$$

இப்பொழுது,

$$(1 + i\sqrt{3})^n - (1 - i\sqrt{3})^n$$

$$= 2^n\left[\cos\frac{n\pi}{3} + i \sin\frac{n\pi}{3}\right] - 2^n\left[\cos\frac{n\pi}{3} - i \sin\frac{n\pi}{3}\right]$$

$$= 2^n\, 2\, i \sin\frac{n\pi}{3}$$

$$= i\, 2^{n+1} \sin\frac{n\pi}{3}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4·2.10.**

$[(\cos\theta - \cos\phi) + i(\sin\theta - \sin\phi)]^n + [(\cos\theta - \cos\phi) - i(\sin\theta - \sin\phi)]^n$-ன் மதிப்பைக் காண்க. (செ. ப. 1962 ஏ.)

$$(\cos\theta - \cos\phi) + i(\sin\theta - \sin\phi)$$

$$= -2\sin\frac{\theta+\phi}{2}\cdot\sin\frac{\theta-\phi}{2} + i\,2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\cdot\sin\frac{\theta-\phi}{2}$$

$$= 2\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)\left[-\sin\frac{\theta+\phi}{2} + i\cos\frac{\theta+\phi}{2}\right]$$

$$= 2\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta+\phi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta+\phi}{2}\right)\right]$$

$$= 2\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi+\theta+\phi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+\theta+\phi}{2}\right)\right]$$

$$\therefore (\cos\theta - \cos\phi) - i(\sin\theta - \sin\phi)$$

$$= 2\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi+\theta+\phi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\pi+\theta+\phi}{2}\right)\right]$$

இப்பொழுது,

$$[(\cos\theta - \cos\phi) + i(\sin\theta - \sin\phi)]^n + [(\cos\theta - \cos\phi) - i(\sin\theta - \sin\phi)]^n$$

$$= 2^n\sin^n\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)\left[\cos n\frac{(\pi+\theta+\phi)}{2} + i\sin n\frac{(\pi+\theta+\phi)}{2}\right]$$

$$+ 2^n\sin^n\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)\left[\cos n\frac{(\pi+\theta+\phi)}{2} - i\sin n\frac{(\pi+\theta+\phi)}{2}\right]$$

$$= 2^n\sin^n\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)\cdot 2\cos n\frac{(\pi+\theta+\phi)}{2}$$

$$= 2^{n+1}\sin^n\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)\cos n\frac{(\pi+\theta+\phi)}{2}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-2.11.**

$n$ ஒரு நேர் முழு எண்.

$(1+x)^n = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots\ldots + p_n x^n$ எனில்,

(1) $p_0 - p_2 + p_4 - p_6 + \ldots\ldots = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}$

(செ.ப. 1945 செ.)

(2) $p_1 - p_3 + p_5 - p_7 + \ldots\ldots = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}$

(செ.ப. 1936 செ.)

(3) $p_0 + p_4 + p_8 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 2^{n-2} + 2^{\frac{n}{2}-1} \cos \frac{n\pi}{4}$ என நிறுவுக.

கொள்கைப்படி,

$$(1+x)^n = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + p_n x^n \ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

(i)-ல் $x = i$ என இட,

$$(1+i)^n = p_0 + p_1 i + p_2 i^2 + p_3 i^3 + p_4 i^4 + \ldots\ldots\ldots + p_n i^n$$

அதாவது,

$$\left[2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n = (p_0 + p_2 i^2 + p_4 i^4 + p_6 i^6 + \ldots\ldots) + i(p_1 + p_3 i^2 + p_5 i^4 + p_7 i^6 + \ldots\ldots)$$

அதாவது,

$$2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i \sin\frac{n\pi}{4}\right) = (p_0 - p_2 + p_4 - p_6 + \ldots\ldots\ldots) + i(p_1 - p_3 + p_5 - p_7 + \ldots\ldots\ldots)$$

மெய், கற்பனைப் பகுதிகளை முறையே சமப்படுத்த,

$$p_0 - p_2 + p_4 - p_6 + \ldots\ldots = 2^{\frac{n}{2}} \cos\frac{n\pi}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

$$p_1 - p_3 + p_5 - p_7 + \ldots\ldots = 2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{n\pi}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(iii)}$$

(i)-ல் $x = 1$ என்று இட,

$$2^n = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots\ldots + p_n \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(iv)}$$

(i)-ல் $x = -1$ என்று இட,

$$0 = p_0 - p_1 + p_2 - p_3 + \ldots\ldots \qquad (v)$$

(iv) ஐயும், (v) ஐயும் கூட்ட,

$$2^n = 2(p_0 + p_2 + p_4 + \ldots\ldots)$$

$$\therefore \quad p_0 + p_2 + p_4 + \ldots\ldots = 2^{n-1} \qquad \ldots\ldots (vi)$$

(ii) ஐயும், (vi) ஐயும் கூட்ட,

$$2(p_0 + p_4 + p_8 + \ldots\ldots) = 2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \cos\frac{n\pi}{4}$$

$$\therefore \quad p_0 + p_4 + p_8 + \ldots\ldots = 2^{n-2} + 2^{\frac{n}{2}-1} \cos\frac{n\pi}{4}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-2.12.**

$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0 = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ **எனில்,**

(1) $\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 3\cos(\alpha + \beta + \gamma)$

(2) $\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 3\sin(\alpha + \beta + \gamma)$ **என நிறுவுக.**

(செ.ப. 1952)

(செ.ப. 1954 செ.)

(ம.ப. 1970 ஏ.)

$a = \cos\alpha + i\sin\alpha$,

$b = \cos\beta + i\sin\beta$,

$c = \cos\gamma + i\sin\gamma$ என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது,

$$a + b + c = (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) + i(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$$

$= 0$ (கொள்கைப்படி)

$$\therefore \quad a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$\therefore \quad (\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha) + (\cos 3\beta + i\sin 3\beta) + (\cos 3\gamma + i\sin 3\gamma)$$

$$= 3[\cos(\alpha+\beta+\gamma) + i\sin(\alpha+\beta+\gamma)]$$

மெய், கற்பனைப் பகுதிகளை முறையே சமப்படுத்த,

$$\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$$

$$\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 3\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-2.13.**

$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0 = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ **எனில்,**

(1) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 0 = \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$

(2) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{3}{2}$

**என நிறுவுக.** (செ.ப. 1947 செ.)

$a = \cos\alpha + i\sin\alpha,$

$b = \cos\beta + i\sin\beta,$

$c = \cos\gamma + i\sin\gamma$ என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது,

$$a + b + c = (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) + i(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$$
$$= 0 + i \,.\, 0 \quad \text{(கொள்கைப்படி)}$$
$$= 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

மேலும்,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = (\cos\alpha - i\sin\alpha) + (\cos\beta - i\sin\beta) + (\cos\gamma - i\sin\gamma)$$
$$= (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) - i(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$$
$$= 0 - i \,.\, 0 \quad \text{(கொள்கைப்படி)}$$
$$= 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2abc\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$ என

அறிவோம்.

$\therefore \quad 0 = a^2 + b^2 + c^2$ [(i), (ii)-லிருந்து]

அ - து, $0 + i.0 = (\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) + (\cos 2\beta + i\sin 2\beta) + (\cos 2\gamma + i\sin 2\gamma)$

மெய், கற்பனைப் பகுதிகளை முறையே சமப்படுத்த,

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(iii)}$$
$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(iv)}$$

(iii)-லிருந்து,

$$1 - 2\sin^2\alpha + 1 - 2\sin^2\beta + 1 - 2\sin^2\gamma = 0$$

அ - து, $2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) = 3$

$$\therefore \quad \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{3}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(v)}$$

அ - து, $1 - \cos^2\alpha + 1 - \cos^2\beta + 1 - \cos^2\gamma = \frac{3}{2}$

$$\therefore \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 3 - \frac{3}{2}$$
$$= \frac{3}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(vi)}$$

(v), (vi) லிருந்து,

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - \frac{3}{2} = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$$

## பயிற்சி 4 (அ)

1. $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)(\cos 10\theta + i\sin 10\theta) = 1$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

(செ. ப. 1948 செ.)

2. $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)\ldots\ldots\ldots\ldots(\cos 10\theta + i\sin 10\theta) = 1$ என்ற சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்தும் $\theta$-ன் பொது மதிப்பைக் காண்க. (செ. ப. 1948 செ.)

3. $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)\ldots\ldots\ldots\ldots(\cos r\theta + i\sin r\theta) = 1$ எனில், $\theta = \frac{4n\pi}{r(r+1)}$. $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம் எனக் காட்டுக.

4. $\cos\alpha + i\sin\alpha$ ஐப் போன்று $n$ கோவைகள் உள்ளன. $\alpha$-ன் மதிப்புகள் கூட்டு விருத்தியில் (Arithmetic Progression) அமைந்துள்ளன. அதன் முதல் உறுப்பு $\frac{\pi}{4}$, கடைசி உறுப்பு $\frac{\pi}{2}$. அந்தக் கோவைகளின் தொடர் பெருக்கற் பலனை (Continued Product) $n$-ன் மதிப்பு பொதுவானதாகவும், $n = 10$ ஆகவும் இருக்கும்போது, காண்க. (செ. ப. 1947 மா.)

5. சுருக்குக :—

(a) $\dfrac{(\cos 2\phi + i\sin 2\phi)^4}{(\cos\phi - i\sin\phi)^3}$ (செ. ப. 1941 செ.)

(b) $\dfrac{(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)^3}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^4}$

(c) $\dfrac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^3(\cos 3\theta - i\sin 3\theta)^4}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^2(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)^{-3}}$

(செ. ப. 1952 செ.)

(d) $\dfrac{(\cos 3\theta - i\sin 3\theta)^2(\cos 6\theta + i\sin 6\theta)^4}{(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)^3(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)^2}$

(செ. ப. 1968 செ.)

(e) $\dfrac{(\cos 5\alpha + i\sin 5\alpha)^3(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)^5}{(\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha)^8(\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha)^9}$

(செ. ப. 1948)

(*f*) $\dfrac{(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)^4 (\cos 4\theta + i\sin 4\theta)^{-5}}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^2 (\cos 5\theta - i\sin 5\theta)^{-3}}$

(செ. ப. 1943)

(*g*) $\dfrac{(\cos\theta + i\sin\theta)^4}{(\sin\theta + i\cos\theta)^5}$ (செ. ப. 1949)

(*h*) $\dfrac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3}{(\sin\beta + i\cos\beta)^4}$ (செ. ப. 1951 செ.)

6. $(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^{-3}. (\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^4 = i$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

7. 1, $\cos 120° + i\sin 120°$, $\cos 240° + i\sin 240°$ என்ற மூன்று எண்களின் $(3n+1)$ ஆம் அடுக்குகளின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியம் என நிரூபிக்க. (செ. ப. 1935 செ.)

8. $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$ என்பதை $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ என்ற வடிவத்தில் (Form) எழுதுக. அதைப் பயன்படுத்தி, $\alpha\lambda - \beta\mu$ என்பது $2\pi$-ன் மடங்கு எனில்,

$$\frac{(1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^\lambda}{(1 + \cos\beta + i\sin\beta)^\mu}$$ என்பது ஒரு மெய் எண், என

நிறுவுக. (ம. ப. 1968 ஏ.)

9. $n$ ஓர் ஒற்றை எண் எனில்.

$$\left[\frac{1 - \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}}{1 - \cos\frac{\pi}{n} - i\sin\frac{\pi}{n}}\right]^n = -1$$ என நிறுவுக.

(ம. ப. 1971 செ.) (செ. ப. 1964 ஏ.)

10. $n$ ஒரு முழு எண் எனில், $\left(\dfrac{1 + \cos A + i\sin A}{1 + \cos A - i\sin A}\right)^n$-ன் மட்டையும் வீச்சையும் (வீச்சத்தையும்) காண்க.

11. $\left(\dfrac{1 + \sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}}{1 + \sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8}}\right)^8$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

12. $x + \dfrac{1}{x} = 2\cos\theta$ எனில், $x = \cos\theta \pm i\sin\theta$ என நிறுவுக.

13. $2\cos\theta = x + x^{-1}$ எனில், $2\cos r\theta = x^r + x^{-r}$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1962 செ.; 1963 செ.)
(ம. ப. 1968 செ.)

14. $x = \cos\theta + i\sin\theta$ எனில், $\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} = i\tan n\theta$ என நிறுவுக.

15. $\alpha, \beta$ என்பவை $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் எனில், $\alpha^n$, $\beta^n$ என்பவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

16. $x = \cos\theta + i\sin\theta$, $y = \cos\phi + i\sin\phi$ எனில்,

(i) $\cos(\theta+\phi) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1+x^2y^2}{xy}\right]$

(ii) $\sin(\theta-\phi) = \dfrac{1}{2i}\left[\dfrac{x^2-y^2}{xy}\right]$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1936 மா.)

17. $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$; $y = \cos\beta + i\sin\beta$ எனில்,

$\dfrac{x^m}{y^n} - \dfrac{y^n}{x^m} = 2i\sin(m\alpha - n\beta)$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1967 ஏ.)

18. $a$ என்பது $\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$ ஐயும் $b, c, d$ என்பவை இது போன்ற கோணவைகளையும் குறித்தால்,

(i) $\sqrt{abcd} + \dfrac{1}{\sqrt{abcd}} = 2\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$

(ii) $\sqrt{\dfrac{ab}{cd}} + \sqrt{\dfrac{cd}{ab}} = 2\cos(\alpha+\beta-\gamma-\delta)$

(செ. ப. 1958 மா.)

(iii) $\sqrt{\dfrac{bcd}{a}} - \sqrt{\dfrac{a}{bcd}} = 2i\sin(-\alpha+\beta+\gamma+\delta)$

என நிறுவுக.

19. $2\cos\theta = x + \dfrac{1}{x}$, $2\cos\phi = y + \dfrac{1}{y}$, ......... எனில்,

$2\cos(\theta+\phi+\ldots\ldots\ldots) = xy\ldots\ldots\ldots + \dfrac{1}{xy\ldots\ldots\ldots}$ என நிறுவுக.

(ம. ப. 1970 செ.)

20. $x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta,\ y + \frac{1}{y} = 2\cos\phi$ எனில்,

$\frac{x^m}{y^n} + \frac{y^n}{x^m} = 2\cos(m\theta - n\phi)$ என நிறுவுக.

[செ. ப. 1940 மா.; 1955)

21. $x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta, y + \frac{1}{y} = 2\cos\phi$ எனில்,

$2\cos(m\theta + n\phi)$ என்பது $x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n}$ -ன் ஒரு மதிப்பாகும் என நிறுவுக. (ம. ப. 1969 ஏ.)

22. சுருக்குக :

(a) $(1 - i\sqrt{3})^6$

(b) $(1 + i)^6 + (1 - i)^6$

(c) $(1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5$

23. $n$ ஒரு நேர் முழு எண் எனில்,

(a) $(1 + i)^n + (1 - i)^n = (\sqrt{2})^{n+2} \cos\frac{n\pi}{4}$

(செ. ப. 1947 செ.; 1954 மா.)

(b) $(1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n = 2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}$

(c) $(\sqrt{3} + i)^n + (\sqrt{3} - i)^n = 2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{6}$

(d) $(-1 - i\sqrt{3})^{3n} + (-1 + i\sqrt{3})^{3n} = 2^{3n+1}$

என நிறுவுக. (ம. ப. 1971 செ.)

24. $\alpha, \beta$ என்பவை $x^2 - 2x + 2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள், $n$ ஒரு நேர் முழு எண் எனில்,

$\alpha^n + \beta^n = 2^{\frac{n+2}{2}} \cos\frac{n\pi}{4}$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1968 ஏ.)

25. $\alpha, \beta$ என்பவை $x^2 - 2x + 4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள், $n$ ஒரு நேர் முழு எண் எனில்,

$\alpha^n + \beta^n = 2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}$ என நிறுவுக.

26. $(1 + \cos\theta + i\sin\theta)^n + (1 + \cos\theta - i\sin\theta)^n$

$= 2^{n+1} \cdot \cos^n \dfrac{\theta}{2} \cdot \cos\dfrac{n\theta}{2}$ என நிறுவுக. (செ. ப. 1936.)

27. $p = \cos\theta + i\sin\theta,\ q = \cos\phi + i\sin\phi$ எனில்,

(i) $\dfrac{p-q}{p+q} = i\tan\dfrac{\theta-\phi}{2}$

(ii) $\dfrac{(p+q)(pq-1)}{(p-q)(pq+1)} = \dfrac{\sin\theta + \sin\phi}{\sin\theta - \sin\phi}$ என நிறுவுக.

28. $a = \text{cis}\,2\alpha,\ b = \text{cis}\,2\beta,\ c = \text{cis}\,2\gamma,\ d = \text{cis}\,2\delta$ எனில், $(a+b)(c+d) = 4\cos(\alpha-\beta)\cos(\gamma-\delta)\ \text{cis}\,(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$ என நிறுவுக. (செ. ப. 1937 மா.)

29. $a = \text{cis}\,\alpha,\ b = \text{cis}\,\beta,\ c = \text{cis}\,\gamma$ எனில்,

$$\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc} = 8\cos\frac{(\beta-\gamma)}{2} \cdot \cos\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$ என நிறுவுக. (செ. ப.)

30. $[(\cos\alpha + i\sin\alpha) - (\cos\beta + i\sin\beta)]^4$

$+ [(\cos\alpha - i\sin\alpha) - (\cos\beta - i\sin\beta)]^4$

$= 2^5 \sin^4\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot \cos 2(\alpha+\beta)$ என நிறுவுக.

31. $[(\cos\theta + \cos\phi) + i(\sin\theta + \sin\phi)]^n$

$+ [(\cos\theta + \cos\phi) - i(\sin\theta + \sin\phi)]^n$

$= 2^{n+1}\cos^n\dfrac{\theta-\phi}{2} \cdot \cos^n\dfrac{(\theta+\phi)}{2}$ என நிறுவுக.

32. $\alpha, \beta$ என்பவை $t^2 - 2t + 2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்; $\cot\phi = x + 1$ எனில், $\dfrac{(x+\alpha)^n - (x+\beta)^n}{\alpha - \beta} = \dfrac{\sin n\phi}{\sin^n\phi}$ என நிறுவுக. (செ. ப. 1938 மா.)

33. $p$, $q$ என்பவை இரு மெய் எண்கள்.

$(x+p)^2+q^2 \equiv (x+\alpha)(x+\beta)$ எனில்,

$$\frac{(x+\alpha)^n-(x+\beta)^n}{\alpha-\beta} = q^{n-1}\,\frac{\sin n\theta}{\sin^n\theta},$$

$\tan\theta = \dfrac{q}{x+p}$ என நிறுவுக.

34. $\cos\alpha + 2\cos\beta + 3\cos\gamma = 0 = \sin\alpha + 2\sin\beta + 3\sin\gamma$ எனில்,

(i) $\cos 3\alpha + 8\cos 3\beta + 27\cos 3\gamma = 18\cos(\alpha+\beta+\gamma)$

(ii) $\sin 3\alpha + 8\sin 3\beta + 27\sin 3\gamma = 18\sin(\alpha+\beta+\gamma)$

என நிறுவுக.

35. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0 = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$ எனில்,

(i) $\sin(\beta+\gamma) + \sin(\gamma+\alpha) + \sin(\alpha+\beta) = 0$

(ii) $\cos(\beta+\gamma) + \cos(\gamma+\alpha) + \cos(\alpha+\beta) = 0$

(iii) $\Sigma\cos(2\alpha+\beta+\gamma) = 0 = \Sigma\sin(2\alpha+\beta+\gamma)$ என நிறுவுக.

36. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0 = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$ எனில்,

(i) $\cos 4\alpha + \cos 4\beta + \cos 4\gamma$

$\qquad = 2[\cos 2(\beta+\gamma) + \cos 2(\gamma+\alpha) + \cos 2(\alpha+\beta)]$

(ii) $\sin 4\alpha + \sin 4\beta + \sin 4\gamma$

$\qquad = 2[\sin 2(\beta+\gamma) + \sin 2(\gamma+\alpha) + \sin 2(\alpha+\beta)]$

என நிறுவுக.

37. $\displaystyle\sum_{a,b,c}\cos(\alpha+b+c) = \sum_{a,b,c}\sin(\alpha+b+c) = 0$ எனில்,

$\displaystyle\sum_{a,b,c}\cos a = \sum_{a,b,c}\cos 2a = 0$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1960 ஏ.)

38. $a = \text{cis}\,2\alpha$, $b = \text{cis}\,2\beta$, $c = \text{cis}\,2\gamma$ என்ற மதிப்புகளை $a(b-c) + b(c-a) + c(a-b) = 0$ என்ற சர்வ சமத்தில் இட்டு, $\Sigma\cos(2\alpha+\beta+\gamma)\,.\,\sin(\beta-\gamma) = 0$ என நிறுவுக.

39. $a = \text{cis}\,\alpha$, $b = \text{cis}\,\beta$, $c = \text{cis}\,\gamma$, $d = \text{cis}\,\delta$ என்ற மதிப்புகளை $(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) = (c^2 - b^2)(a^2 - d^2) + (a^2 - c^2)(b^2 - d^2)$ என்ற சர்வ சமத்தில் இட்டு,

$$\sin(\alpha - \beta) \,.\, \sin(\gamma - \delta) = \sin(\alpha - \delta) \,.\, \sin(\gamma - \beta) + \sin(\alpha - \gamma) \,.\, \sin(\beta - \delta)$$ என நிறுவுக.

## விடைகள்

1. $\theta = \dfrac{2n\pi}{13}$, $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

2. $\theta = \dfrac{2n\pi}{55}$, $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

4. $\cos\dfrac{3n\pi}{8} + i\sin\dfrac{3n\pi}{8}$ ; $\cos\dfrac{15\pi}{4} + i\sin\dfrac{15\pi}{4}$

5. (a) $\cos 11\phi + i\sin 11\phi$

(b) $\cos 18\theta - i\sin 18\theta$

(c) 1

(d) $\cos 10\theta + i\sin 10\theta$

(e) $\cos 14\alpha + i\sin 14\alpha$

(f) $\cos 49\theta - i\sin 49\theta$

(g) $\sin 9\theta - i\cos 9\theta$

(h) $\cos(3\alpha + 4\beta) + i\sin(3\alpha + 4\beta)$

6. $\theta = \dfrac{(4n+1)\pi}{12}$, $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

8. $2\cos\dfrac{\alpha}{2} \,.\, \left(\cos\dfrac{\alpha}{2} + i\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$

10. 1 ; $n$ A.

11. $-1$.

15. $x^2 - 2x\cos n\theta + 1 = 0$

22. (a) $2^6$ (b) 0 (c) $2^5$

## 4.3. $(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}$ -ன் மதிப்புகள்

$q$ ஒரு நேர் முழு எண், $p$ ஒரு முழு எண் எனில், டிமாவியரின் தேற்றப்படி

$\cos \frac{p}{q}\theta + i \sin \frac{p}{q}\theta$, $(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}$-ன் ஒரு மதிப்பு ஆகும். $s(\cos\phi + i\sin\phi)$ என்பது $(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}$-ன் ஏதாவது ஒரு மதிப்பாக இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $s^q(\cos\phi + i\sin\phi)^q = (\cos\theta + i\sin\theta)^p$

$\therefore\ s^q(\cos q\phi + i\sin q\phi) = 1(\cos p\theta + i\sin p\theta)$

$\therefore\ s^q = 1, \cos q\phi = \cos p\theta, \sin q\phi = \sin p\theta.$

$s$ என்பது ஒரு சிக்கல் எண்ணின் மட்டு (Modulus).

$\therefore\ s > 0$; ஆனால் $s^q = 1\ \therefore s = 1$

$\cos q\phi = \cos p\theta$, $\sin q\phi = \sin p\theta$ என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$q\phi = 2K\pi + p\theta$, K ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

$$\therefore\ \phi = \frac{p}{q}\theta + \frac{2K\pi}{q}$$

$$\therefore\ s(\cos\phi + i\sin\phi) = \cos\left(\frac{p}{q}\theta + \frac{2K\pi}{q}\right) + i\sin\left(\frac{p}{q}\theta + \frac{2K\pi}{q}\right)$$

இதில், $K = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, (q-1)$ எனக் கொடுத்தால்,

$$\cos\frac{p}{q}\theta + i\sin\frac{p}{q}\theta,$$

$$\cos\left(\frac{p}{q}\theta + \frac{2\pi}{q}\right) + i\sin\left(\frac{p}{q}\theta + \frac{2\pi}{q}\right),$$

$$\cos\left(\frac{p}{q}\theta + \frac{4\pi}{q}\right) + i\sin\left(\frac{p}{q}\theta + \frac{4\pi}{q}\right),$$

..............................................................

..............................................................

$$\cos\left[\frac{p}{q}\theta + \frac{2(q-1)\pi}{q}\right] + i\sin\left[\frac{p}{q}\theta + \frac{2(q-1)\pi}{q}\right]$$

என்ற $q$ மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன.

K க்கு நாம் கொடுத்த $q$ மதிப்புகளில்,

$K = K_1$, $K = K_2$ என்பவை எவையேனும் இரண்டு மதிப்புகள் எனில், அவைகள் கொடுக்கும் கோணங்கள் முறையே,

$$\frac{p}{q}\theta + \frac{2K_1\pi}{q}, \quad \frac{p}{q}\theta + \frac{2K_2\pi}{q}$$ ஆகும்.

இவைகளின் வேறுபாடு $= \dfrac{2\,|K_1 - K_2|\,\pi}{q}$

ஆனால் $|K_1 - K_2| < q \quad \therefore \dfrac{2\,|K_1 - K_2|\,\pi}{q} < 2\pi$

ஆகவே, $K = K_1$, $K = K_2$ என்பவை கொடுக்கும் மதிப்புகள் வெவ்வேறானவை. எனவே, நமக்குக் கிடைத்த $q$ மதிப்புகளும் வெவ்வேறானவை.

$K = q, q+1, q+2, \ldots\ldots$, அல்லது

$K = -1, -2, -3, \ldots\ldots$ எனக் கொடுத்தால், நமக்கு ஏற்கெனவே கிடைத்த $q$ மதிப்புகள்தாம் திரும்பத் திரும்ப வருகின்றன.

சான்றாக, $K = q$ எனில்.

$$\cos\left(\frac{p}{q}\theta + \frac{2K\pi}{q}\right) + i\sin\left(\frac{p}{q}\theta + \frac{2K\pi}{q}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{p}{q}\theta + \frac{2q\pi}{q}\right) + i\sin\left(\frac{p}{q}\theta + \frac{2q\pi}{q}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{p}{q}\theta + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{p}{q}\theta + 2\pi\right)$$

$$= \cos\frac{p}{q}\theta + i\sin\frac{p}{q}\theta$$

இது நமக்குக் கிடைத்த முதல் மதிப்பு (First Value) ஆகும்.

மேலும், $K = -1$ எனில்.

$$\cos\left[\frac{p}{q}\theta + \frac{2K\pi}{q}\right] + i\sin\left[\frac{p}{q}\theta + \frac{2K\pi}{q}\right]$$

$$= \cos\left[\frac{p}{q}\theta + \frac{2(-1)\pi}{q}\right] + i\sin\left[\frac{p}{q}\theta + \frac{2(-1)\pi}{q}\right]$$

$$= \cos\left[\frac{p}{q}\theta - \frac{2\pi}{q}\right] + i\sin\left[\frac{p}{q}\theta - \frac{2\pi}{q}\right]$$

$$= \cos\left[\frac{p}{q}\theta - \frac{2\pi}{q} + 2\pi\right] + i\sin\left[\frac{p}{q}\theta - \frac{2\pi}{q} + 2\pi\right]$$

$$= \cos\left[\frac{p}{q}\theta + \frac{2q\pi - 2\pi}{q}\right] + i\sin\left[\frac{p}{q}\theta + \frac{2q\pi - 2\pi}{q}\right]$$

$$= \cos\left[\frac{p}{q}\theta + \frac{2(q-1)\pi}{q}\right] + i\sin\left[\frac{p}{q}\theta + \frac{2(q-1)\pi}{q}\right]$$

இது நமக்குக் கிடைத்த கடைசி மதிப்பு (Last Value) ஆகும்.

ஆகவே, $s(\cos\phi + i\sin\phi)$ க்கு, அதாவது $(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}$-க்கு,

$$\cos\left(\frac{p}{q}\theta + \frac{2K\pi}{q}\right) + i\sin\left(\frac{p}{q}\theta + \frac{2K\pi}{q}\right), K = 0, 1, 2, \ldots,$$

$(q-1)$ என்ற $q$ மதிப்புகள் தாம் உண்டு. அவை ஒவ்வொன்றும் வெவ்வேறானவை. எனவே,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{p}{q}} = \cos\left(\frac{p\theta + 2K\pi}{q}\right) + i\sin\left(\frac{p\theta + 2K\pi}{q}\right), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(89)$$

$K = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, (q-1)$.

## 4.4. $(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}$ -ன் முதன் மதிப்பு (Principal Value)

$-\pi < \theta \leq \pi$ எனில், $\cos\frac{p}{q}\theta + i\sin\frac{p}{q}\theta$ ஐ $(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}$ -ன் முதன் மதிப்பாக (Principal Value) எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

அல்லது (Otherwise), $s$ ஒரு முழு எண்ணாகவும், $-\pi < \theta + 2s\pi \leq \pi$ ஆகவும் இருந்தால்,

$$\text{cis}\left\{\frac{p}{q}(\theta + 2s\pi)\right\} = \text{cis}\left\{\frac{p}{q}\theta + \frac{2ps\pi}{q}\right\} \text{ ஐ}$$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}$ -ன் முதன் மதிப்பாக (Principal Value) எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

## 4.5. சிக்கல் எண்களின் மூலங்கள் (Roots of Complex Numbers)

$n$ ஒரு நேர் முழு எண் எனில், $u^n = z$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள், $z$-ன் $n$ ஆம் மூலங்கள் [$n$ th roots of $z$] ஆகும். $p$ ஒரு முழு எண், $q$ ஒரு நேர் முழு எண் எனில், $u^q = z^p$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள், $z^p$ -ன் $q$ ஆம் மூலங்கள் ($q$ th roots of $z^p$ ) ஆகும்.

## 4.6. $z^{\frac{p}{q}}$-ன் மதிப்புகள்

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \; -\pi < \theta \leqslant \pi$ ஆக இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $z^{\frac{p}{q}} = r^{\frac{p}{q}} [\cos\theta + i\sin\theta]^{\frac{p}{q}}$

$$= r^{\frac{p}{q}}\left[\cos\frac{(p\theta + 2K\pi)}{q} + i\sin\frac{(p\theta + 2K\pi)}{q}\right],$$

$$K = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, (q-1) \quad \ldots\ldots(90)$$

[சூத்திரம் (89)-ன் படி]

$p = 1$ எனில்,

$$z^{\frac{1}{q}} = r^{\frac{1}{q}}\left[\cos\frac{(\theta + 2K\pi)}{q} + i\sin\frac{(\theta + 2K\pi)}{q}\right],$$

$$K = 0, 1, 2, \ldots\ldots, (q-1) \quad \ldots\ldots(91)$$

குறிப்பு :

$$z^{\frac{p}{q}} = r^{\frac{p}{q}} [\cos\theta + i\sin\theta]^{\frac{p}{q}}$$

$$= r^{\frac{p}{q}} [\cos(\theta + 2K\pi) + i\sin(\theta + 2K\pi)]^{\frac{p}{q}}$$

$$= r^{\frac{p}{q}}\left[\cos\frac{p}{q}(\theta + 2K\pi) + i\sin\frac{p}{q}(\theta + 2K\pi)\right]$$

$$K = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, (q-1) \quad \ldots\ldots(92)$$

என்ற சூத்திரமும், சூத்திரம் (90) கொடுத்த அதே $q$ வெவ்வேறான மதிப்புகளைத்தான் தருகிறது.

## 4.7. வரைகணித முறைப்படி சிக்கல் எண்ணின் $n$ ஆம் மூலங்களைக் குறித்தல்.

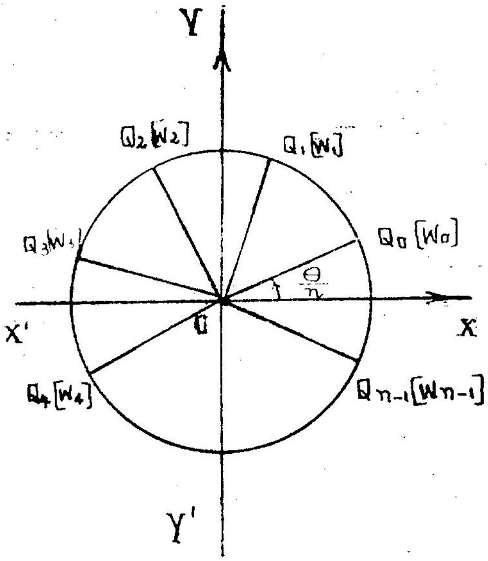
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \; -\pi < \theta \leqslant \pi$ என இருக்கட்டும். இப்பொழுது,

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{(\theta + 2K\pi)}{n} + i\sin\frac{(\theta + 2K\pi)}{n}\right] = w_K,$$

$$K = 0, 1, 2, \ldots\ldots, (n-1).$$

இந்த $n$ வெவ்வேறான மதிப்புகளும் $z$-ன் $n$ ஆம் மூலங்கள்,

ஆர்கன் வரை படத்தில், ஆதியை மையமாகவும், $r^{\frac{1}{n}}$ ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டத்தை வரை (படம் 27). அவ்




படம் 27.

வட்டத்தில், $Q_0$, $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$, ............., $Q_{n-1}$ என்ற புள்ளிகளை,

$$\underline{|XOQ_0} = \frac{\theta}{n},$$

$$\underline{|XOQ_1} = \frac{\theta + 2\pi}{n},$$

$$\underline{|XOQ_2} = \frac{\theta + 4\pi}{n},$$

$$\underline{|XOQ_3} = \frac{\theta + 6\pi}{n},$$

$$\underline{|XOQ_4} = \frac{\theta + 8\pi}{n},$$

................................

$$\underline{|XOQ_{n-1}} = \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}$$ ஆக இருக்கும்படி குறித்தால், அப்புள்ளிகள் முறையே $w_0$, $w_1$, $w_2$, $w_3$, $w_4$, ..........., $w_{n-1}$ என்ற $z$-ன் $n$, $n$ ஆம் மூலங்களைக் குறிக்கின்றன.

**குறிப்பு :**

$$\angle Q_0 O Q_1 = \angle Q_1 O Q_2 = \angle Q_2 O Q_3$$
$$= \ldots\ldots\ldots = \angle Q_{n-1} O Q_0 = \frac{2\pi}{n}.$$

எனவே, $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, \ldots\ldots\ldots Q_{n-1}$ என்ற $n$ புள்ளிகளும் அந்த வட்டத்தினுள் வரையப்பட்ட (Inscribed) $n$ பக்கங்களுள்ள ஓர் ஒழுங்குப் பலகோணத்தின் (Regular Polygon) உச்சிகளாகும்.

## மாதிரிக் கணக்குகள்

**மாதிரிக் கணக்கு 4-8.1.**

**$(1+\sqrt{-3})^{\frac{3}{4}}$-ன் எல்லா மதிப்புகளையும் காண்க; அவற்றின் தொடர் பெருக்கற் பலன்** (Continued Product) **8 என நிரூபிக்க.**
(ம.ப. 1968 செ.)

$1+\sqrt{-3} = 1 + i\sqrt{3} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $r\cos\theta = 1, \qquad r\sin\theta = \sqrt{3}$

$$\therefore \quad r^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4$$
$$\therefore \quad r = 2$$
$$\therefore \quad \cos\theta = \tfrac{1}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$
$$\therefore \quad 1+\sqrt{-3} = 2\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$$
$$\therefore \quad (1+\sqrt{-3})^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4}}\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]^{\frac{3}{4}}$$
$$= 2^{\frac{3}{4}}\left[\cos\frac{\left(3.\frac{\pi}{3}+2K\pi\right)}{4} + i\sin\frac{\left(3.\frac{\pi}{3}+2K\pi\right)}{4}\right],$$

[சூத்திரம் (90)-ன் படி]

$$= 2^{\frac{3}{4}}\left[\cos\frac{(2K+1)\pi}{4} + i\sin\frac{(2K+1)\pi}{4}\right]$$

$K = 0, 1, 2, 3$ எனக் கொடுத்தால், $(1 + \sqrt{-3})^{\frac{3}{4}}$-ன் எல்லா மதிப்புகளும் கிடைக்கும். அவைகள் முறையே

$$2^{\frac{3}{4}}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right],$$

$$2^{\frac{3}{4}}\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right],$$

$$2^{\frac{3}{4}}\left[\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right],$$

$$2^{\frac{3}{4}}\left[\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right].$$

அவைகளின் தொடர் பெருக்கற் பலன் (Continued Product)

$$= \left(2^{\frac{3}{4}}\right)^4\left[\cos\frac{\pi + 3\pi + 5\pi + 7\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 3\pi + 5\pi + 7\pi}{4}\right]$$

$$= 2^3[\cos 4\pi + i\sin 4\pi]$$

$$= 2^3 . 1$$

$$= 8$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-8.2.**

**$(-\sqrt{3} + i)^{\frac{1}{5}}$-ன் எல்லா மதிப்புகளையும் கண்டு பிடித்து, அவைகளை வரை கணித முறைப்படி குறிக்க.**

$-\sqrt{3} + i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $r\cos\theta = -\sqrt{3}$, $\quad r\sin\theta = 1$.

$$\therefore \quad r^2 = (-\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$$

$$\therefore \quad r = 2$$

$$\therefore \quad \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\theta = \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{5\pi}{6} = 150°$$

$$\therefore \quad -\sqrt{3} + i = 2[\cos 150° + i\sin 150°]$$

$$= 2[\cos(150° + K . 360°) + i\sin(150° + K . 360°)],$$

K ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

$$\therefore \quad (-\sqrt{3}+i)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{5}}\left[\cos\frac{(150^\circ + K.360^\circ)}{5} + i\sin\frac{(150^\circ + K.360^\circ)}{5}\right]$$

$$= 2^{\frac{1}{5}}\left[\cos(30^\circ + K.72^\circ) + i\sin(30^\circ + K.72^\circ)\right]$$

$K = 0, 1, 2, 3, 4$ எனக் கொடுத்தால், $(-\sqrt{3}+i)^{\frac{1}{5}}$-ன் எல்லா மதிப்புகளும் கிடைக்கும்.

அவைகள் முறையே,

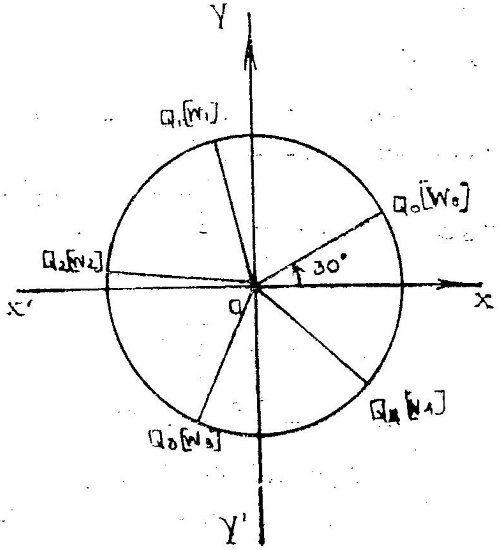
$$w_0 = 2^{\frac{1}{5}}[\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ]$$

$$w_1 = 2^{\frac{1}{5}}[\cos 102^\circ + i\sin 102^\circ]$$

$$w_2 = 2^{\frac{1}{5}}[\cos 174^\circ + i\sin 174^\circ]$$

$$w_3 = 2^{\frac{1}{5}}[\cos 246^\circ + i\sin 246^\circ]$$

$$w_4 = 2^{\frac{1}{5}}[\cos 318^\circ + i\sin 318^\circ]$$




படம் 28.

ஆர்கன் வரைபடத்தில், ஆதியை மையமாகவும், $2^{\frac{1}{5}}$-ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டத்தை வரை (படம் 28). அவ்வட்டத்தில், $Q_0$, $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$ என்ற புள்ளிகளை,

$$\angle XOQ_0 = 30^\circ,$$

$$\angle XOQ_1 = 102^\circ,$$

$$\angle XOQ_2 = 174^\circ,$$

$$\angle XOQ_3 = 246^\circ,$$

$\angle XOQ_4 = 318^\circ$ ஆக இருக்கும்படி குறித்தால், அப் புள்ளிகள் முறையே $w_0$, $w_1$, $w_2$, $w_3$, $w_4$ என்ற எண்களைக் குறிக்கின்றன.

**மாதிரிக் கணக்கு 4-8.3.**

***n* ஒரு நேர் முழு எண் எனில், $(a+ib)^{\frac{1}{n}}(a-ib)^{\frac{1}{n}}$-க்கு *n* மெய் மதிப்புகள் உண்டு என நிறுவி,**

$\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}}+\sqrt[3]{1-i\sqrt{3}}$ **-ன் மெய் மதிப்புகளைக் காண்க.**

$a+ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$a+ib = r[\cos\theta + i\sin\theta]$$
$$= r[\cos(\theta+2K\pi) + i\sin(\theta+2K\pi)]$$

$$\therefore\ (a+ib)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{(\theta+2K\pi)}{n} + i\sin\frac{(\theta+2K\pi)}{n}\right],\ K=0,1,2,\ldots,(n-1)$$

$$a-ib = r[\cos\theta - i\sin\theta]$$
$$= r[\cos(\theta+2s\pi) - i\sin(\theta+2s\pi)]$$

$$\therefore \quad (a - i\,b)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \frac{(\theta + 2s\pi)}{n} - i \sin \frac{(\theta + 2s\pi)}{n} \right];$$

$$s = 0, 1, 2, \ldots\ldots, (n-1)$$

$(a + i\,b)^{\frac{1}{n}}$-க்கு $n$ மதிப்புகளும், $(a - i\,b)^{\frac{1}{n}}$-க்கு $n$ மதிப்புகளும் இருப்பதால், $(a + i\,b)^{\frac{1}{n}} + (a - i\,b)^{\frac{1}{n}}$-க்கு மொத்தம் $n^2$ மதிப்புகள் உண்டு.

$s = \mathrm{K}$ ஆக இருக்கும்போது,

$$(a + i\,b)^{\frac{1}{n}} + (a - i\,b)^{\frac{1}{n}}$$

$$= r^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \frac{(\theta + 2\mathrm{K}\pi)}{n} + i \sin \frac{(\theta + 2\mathrm{K}\pi)}{n} \right] + r^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \frac{(\theta + 2\mathrm{K}\pi)}{n} - i \sin \frac{(\theta + 2\mathrm{K}\pi)}{n} \right]$$

$$= 2r^{\frac{1}{n}} \cos \frac{(\theta + 2\mathrm{K}\pi)}{n}$$

இது ஒரு மெய் எண். எனவே $s = \mathrm{K}$ ஆக இருக்கும்போது $(a + i\,b)^{\frac{1}{n}} + (a - i\,b)^{\frac{1}{n}}$-ன் மதிப்பு மெய்யாக (Real) இருக்கிறது. ஆனால் K-க்கு 0, 1, 2, ......, $(n-1)$ என்ற $n$ மதிப்புகள் உண்டு. எனவே, $(a + i\,b)^{\frac{1}{n}} + (a - i\,b)^{\frac{1}{n}}$-க்கு $n$ மெய் மதிப்புகள் உண்டு.

அவைகள்

$$2r^{\frac{1}{n}} \cos \frac{\theta}{n},$$

$$2r^{\frac{1}{n}} \cos \frac{\theta + 2\pi}{n},$$

$$2r^{\frac{1}{n}} \cos \frac{\theta + 4\pi}{n},$$

......................................

......................................

$$2r^{\frac{1}{n}} \cos \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}$$ ஆகும்.

$$\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}}+\sqrt[3]{1-i\sqrt{3}}$$

$$=(1+i\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}+(1-i\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}$$

இதில் $n = 3$. எனவே இதற்கு மூன்று மெய் மதிப்புகள் உண்டு.

மேலும், $a = 1,\ b = \sqrt{3}$

$\therefore\ r = \sqrt{1+3} = 2,\ \cos\theta = \frac{1}{2},\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{3}$

எனவே, $\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}}+\sqrt{1-i\sqrt{3}}$ -ன் மூன்று மெய் மதிப்புகளும்

$$2\,.\,2^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\pi}{9},$$

$$2\,.\,2^{\frac{1}{3}}\cos\frac{7\pi}{9},$$

$$2\,.\,2^{\frac{1}{3}}\cos\frac{13\pi}{9}$$ ஆகும்.

**மாதிரிக் கணக்கு 4-8.4**

**1 -ன் $n$ ஆம் மூலங்களைக் காண்க ; அவைகளைப் பெருக்கல் விருத்தியில் (Geometric Progression) வரிசைப்படுத்த முடியும் என நிறுவுக.**

(செ.ப. 1962 ஏ.)
(ம.ப. 1968 செ.)
(ம.ப. 1971 ஏ.)

$1 = \cos 0 + i\sin 0$

$= \cos 2K\pi + i\sin 2K\pi$, K ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

$$\therefore\ 1^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2K\pi}{n} + i\sin\frac{2K\pi}{n}$$

இதில் $K = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots, (n-1)$ எனக் கொடுத்தால், 1-ன் எல்லா $n$ ஆம் மூலங்களும் கிடைக்கும்.

அவைகள் முறையே,

$$\cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n},$$

$$\cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n} = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}\right)^2,$$

$$\cos \frac{6\pi}{n} + i \sin \frac{6\pi}{n} = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}\right)^3,$$

......................................................................

......................................................................

$$\cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}\right)^{n-1}$$

எனவே, $\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} = \omega$ என எடுத்துக் கொண்டால் $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \ldots\ldots\ldots\ldots, \omega^{n-1}$ என்பவை 1-ன் $n$ ஆம் மூலங்கள். இவைகள் ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் (Geometric Progression) அமைந்துள்ளன என்பது வெளிப்படை. அதன் பொது விகிதம் (Common Ratio) $\omega$ ஆகும்.

**மாதிரிக் கணக்கு 4·8.5.**

**$1, \omega, \omega^2, \omega^3. \ldots\ldots\ldots, \omega^{n-1}$ என்பவை 1-ன் $n$, $n$-ஆம் மூலங்கள் எனில், $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots\ldots\ldots + \omega^{n-1} = 0$ என நிரூபிக்க.**

$1, \omega, \omega^2, \omega^3, \ldots\ldots\ldots\ldots, \omega^{n-1}$ என்பவை $x^n = 1$, அதாவது $x^n - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்.

$$\therefore \quad \omega^n - 1 = 0$$

இப்பொழுது, $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots\ldots\ldots + \omega^{n-1} = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1}$

$$= \frac{0}{\omega - 1}$$

$$= 0$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-8.6.**

**$n$ ஒரு நேர் முழு எண் எனில், $x^n + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.**

$$x^n + 1 = 0$$

அ - து,
$$\begin{aligned} x^n &= -1 \\ &= \cos\pi + i\sin\pi \\ &= \cos(\pi + 2K\pi) + i\sin(\pi + 2K\pi) \\ &= \cos(2K+1)\pi + i\sin(2K+1)\pi, \end{aligned}$$

K ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

$$\therefore \qquad x = \cos\frac{(2K+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2K+1)\pi}{n}.$$

$K = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, (n-1)$ எனக் கொடுத்தால், $x$-ன் எல்லா மதிப்புகளும் கிடைக்கும்.

அவைகள் முறையே $\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$,

$$\cos\frac{3\pi}{n} + i\sin\frac{3\pi}{n},$$

$$\cos\frac{5\pi}{n} + i\sin\frac{5\pi}{n},$$

.............................

.............................

$\cos\frac{(2n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2n-1)\pi}{n}$ ஆகும்.

**மாற்று முறை :**

$$\begin{aligned} x^n &= -1 \\ &= \cos\pi \pm i\sin\pi \\ &= \cos(\pi + 2K\pi) \pm i\sin(\pi + 2K\pi) \\ &= \cos(2K+1)\pi \pm i\sin(2K+1)\pi, \end{aligned}$$

K ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

$$\therefore \quad x = \cos\frac{(2K+1)\pi}{n} \pm i\sin\frac{(2K+1)\pi}{n}$$

இதில், $n$ ஓர் இரட்டை எண் எனில், $K = 0, 1, 2, \ldots\ldots, \left(\frac{n}{2} - 1\right)$.

$n$ ஓர் ஒற்றை எண் எனில்,

$$x = -1 \text{ அல்லது } \cos\frac{(2K+1)\pi}{n} \pm i\sin\frac{(2K+1)\pi}{n},$$

$$K = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots, \frac{n-3}{2}.$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-8.7.**

$x^8 - x^5 + x^3 - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

(செ. ப. 1935 செ.)

$$x^8 - x^5 + x^3 - 1 = 0$$

அ-து, $x^5(x^3-1) + (x^3-1) = 0$

அ-து, $(x^3-1)(x^5+1) = 0$

$\therefore$ $x^3 - 1 = 0$ அல்லது $x^5 + 1 = 0$

அ-து, $x^3 = 1$ அல்லது $x^5 = -1$

முதலில் $x^3 = 1$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்வோம்.

இப்பொழுது, $x^3 = 1$

$$= \cos 2K\pi + i\sin 2K\pi$$

$$\therefore \quad x = \cos\frac{2K\pi}{3} + i\sin\frac{2K\pi}{3}, \; K = 0, 1, 2.$$

அடுத்து, $x^5 = -1$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்வோம்.

இப்பொழுது, $x^5 = -1$

$$= \cos(2s+1)\pi + i\sin(2s+1)\pi,$$

$s$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

$$\therefore \quad x = \cos\frac{(2s+1)\pi}{5} + i\sin\frac{(2s+1)\pi}{5}, \; s = 0, 1, 2, 3, 4.$$

எனவே, $\cos\frac{2K\pi}{3} + i\sin\frac{2K\pi}{3}$, $K = 0, 1, 2$ ;

$$\cos\frac{(2s+1)\pi}{5} + i\sin\frac{(2s+1)\pi}{5}, \; s = 0, 1, 2, 3, 4$$

என்ற எட்டு எண்களும் கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

**மாதிரிக் கணக்கு 4-8.8.**

$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

(ம. ப. 1969 செ.)

$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ ........... (i)

இரண்டு பக்கங்களையும் $(x - 1)$ ஆல் பெருக்க,

$(x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$

அ-து, $x^6 - 1 = 0$ ........... (ii)

அ-து, $x^6 = 1$

$= \cos 2K\pi + i \sin 2K\pi$, K ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

$$\therefore \quad x = \cos \frac{2K\pi}{6} + i \sin \frac{2K\pi}{6}$$

$$= \cos \frac{K\pi}{3} + i \sin \frac{K\pi}{3}, \ K = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

$K = 0$ எனில், $x = \cos 0 + i \sin 0 = 1$

$K = 1$ எனில், $x = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$

$K = 2$ எனில், $x = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$

$K = 3$ எனில், $x = \cos \pi + i \sin \pi = -1$

$K = 4$ எனில், $x = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$

$$= \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}$$

$K = 5$ எனில், $x = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$

எனவே, $\pm 1, \cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3}, \cos \frac{2\pi}{3} \pm i \sin \frac{2\pi}{3}$ என்ற ஆறு எண்களும் சமன்பாடு (ii)-ன் தீர்வுகள்.

சமன்பாடு (i) ஐ $x - 1$ ஆல் பெருக்கி, சமன்பாடு (*ii*) ஐ அடைந்துள்ளோம். எனவே, சமன்பாடு (iii)-ன் ஆறு தீர்வுகளில், 1 என்ற தீர்வு மட்டும் சமன்பாடு (*i*)-ன் தீர்வாகாது. ஆகவே, $-1$, $\cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3}, \cos \frac{2\pi}{3} \pm i \sin \frac{2\pi}{3}$ என்ற ஐந்து எண்களும் சமன்பாடு (i)-ன் தீர்வுகள் ஆகும்.

**மாதிரிக் கணக்கு 4-8·9.**

$\sqrt[3]{2+2i}$-ன் எல்லா மதிப்புகளையும் காண்க. அதன் மூலம் $x^6 - 4x^3 + 8 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

(செ. ப. 1968 செ.)
(ம. ப. 1971 ஏ.)

$2 + 2i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $r\cos\theta = 2, \qquad r\sin\theta = 2$

$$\therefore \quad r^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

$$\therefore \quad r = \sqrt{8} = 8^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore 2 + 2i = 8^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= 8^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2K\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2K\pi\right)\right],$$

K ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

$$= 8^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{(8K+1)\pi}{4} + i\sin\frac{(8K+1)\pi}{4}\right]$$

$$\therefore 2 - 2i = 8^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{(8K+1)\pi}{4} - i\sin\frac{(8K+1)\pi}{4}\right].$$

இப்பொழுது,

$$\sqrt[3]{2+2i}$$

$$= (2+2i)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 8^{\frac{1}{6}}\left[\cos\frac{(8K+1)\pi}{12} + i\sin\frac{(8K+1)\pi}{12}\right],$$

K = 0, 1, 2. ......... (i)

இதேபோல்,

$$\sqrt[3]{2-2i}$$

$$= \quad 8^{\frac{1}{6}}\left[\cos\frac{(8K+1)\pi}{12} - i\sin\frac{(8K+1)\pi}{12}\right],$$

$K = 0,\ 1,\ 2.$ ......... (ii)

கொடுத்துள்ள சமன்பாடு $x^6 - 4x^3 + 8 = 0$ ......... (iii)

$$\therefore \quad x^3 = \frac{4 \pm \sqrt{16-32}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm i4}{2}$$

$$= 2 \pm i2$$

$$\therefore \quad x = (2 \pm 2i)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2 \pm 2i}$$

$$\therefore \quad x = 8^{\frac{1}{6}}\left[\cos\frac{(8K+1)\pi}{12} \pm i\sin\frac{(8K+1)\pi}{12}\right],$$

$K = 0,\ 1,\ 2.$ [ (i), (ii)-லிருந்து ]

**மாதிரிக் கணக்கு 4-8.10.**

**$n$ ஒரு நேர் முழு எண் எனில்,**
**$(1+x)^n = (1-x)^n$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.**

கொடுத்துள்ள சமன்பாடு $(1+x)^n = (1-x)^n$ ........... (i)

அ - து, $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n = 1$

$= \cos 2K\pi + i\sin 2K\pi,$

K ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

$$\therefore \frac{1+x}{1-x} = \cos\frac{2K\pi}{n} + i\sin\frac{2K\pi}{n},\ K = 0, 1, 2, \ldots\ldots, (n-1).$$

$$\therefore \frac{1+x-(1-x)}{1+x+(1-x)} = \frac{\cos\frac{2K\pi}{n} + i\sin\frac{2K\pi}{n} - 1}{\cos\frac{2K\pi}{n} + i\sin\frac{2K\pi}{n} + 1}$$

$$\text{அ-து, } x = \frac{-\left[1-\cos\frac{2K\pi}{n}\right]+i\sin\frac{2K\pi}{n}}{\left[1+\cos\frac{2K\pi}{n}\right]+i\sin\frac{2K\pi}{n}}$$

$$= \frac{-2\sin^2\frac{K\pi}{n}+i\,2\sin\frac{K\pi}{n}.\cos\frac{K\pi}{n}}{2\cos^2\frac{K\pi}{n}+i\,2\sin\frac{K\pi}{n}.\cos\frac{K\pi}{n}}$$

$$= \frac{2i\sin\frac{K\pi}{n}\left[\cos\frac{K\pi}{n}+i\sin\frac{K\pi}{n}\right]}{2\cos\frac{K\pi}{n}\left[\cos\frac{K\pi}{n}+i\sin\frac{K\pi}{n}\right]}\quad [\because i^2=-1$$

$$= i\tan\frac{K\pi}{n}.\quad K = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, (n-1).$$

எனவே, $i\tan\frac{K\pi}{n}$, $K = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, (n-1)$ என்ற $n$ எண்களும் சமன்பாடு (i)-ன் தீர்வுகள்.

**மாதிரிக் கணக்கு 4-8.11.**

$\alpha = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$ எனில், $\alpha + \alpha^4$, $\alpha^2 + \alpha^3$ என்பவைகளைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} \text{ (கொள்கை)}$$

$$\therefore\ \alpha^5 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

அ-து, $\alpha^5 - 1 = 0$

அ-து, $(\alpha - 1)\ (\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) = 0$

ஆனால், $\alpha \neq 1$

$$\therefore\ \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

தேவையான சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\alpha + \alpha^4$, $\alpha^2 + \alpha^3$ ஆகும்.

தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகை

$= \alpha + \alpha^4 + \alpha^2 + \alpha^3$

$= \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha$

$= -1$ [(ii)-லிருந்து]

தீர்வுகளின் பெருக்குத் தொகை

$$= (\alpha + \alpha^4)(\alpha^2 + \alpha^3)$$
$$= \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^7$$
$$= \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 . \alpha + \alpha^5 . \alpha^2$$
$$= \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha + \alpha^2 \qquad \text{[ (i)-லிருந்து]}$$
$$= \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha$$
$$= -1 \qquad \text{[ (ii)-லிருந்து]}$$

நமக்குத் தேவையான சமன்பாடு

$x^2$ — (தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகை) $x$

+ தீர்வுகளின் பெருக்குத் தொகை $= 0$ ஆகும்.

அ - து. $x^2 + x - 1 = 0$

## பயிற்சி 4 (ஆ)

**1. கீழ் வருவனவற்றின் எல்லா மதிப்புகளையும் காண்க :**

(a) $(1 + i)^{\frac{1}{3}}$ (செ.ப. 1950 மா. ; 1953 செ. ; 1970 செ.)

(b) $(1 + \sqrt{-1})^{\frac{1}{5}}$ (செ.ப. 1960 ஏ.)

(c) $(1 + i)^{\frac{1}{7}}$ (செ.ப. 1952 மா.)

(d) $\sqrt[3]{2 + 2i}$ (செ.ப. 1968 செ.)

(e) $(1 + i\sqrt{3})^{\frac{1}{4}}$ (செ.ப. 1951 செ.)

(f) $(1 + i\sqrt{3})^{-\frac{11}{3}}$ (செ.ப. 1950 மா.)

(g) $(\sqrt{3} + i)^{\frac{1}{5}}$ (செ. ப. 1962 ஏ.)

(h) $(\sqrt{3} - i)^{\frac{1}{5}}$ (செ. ப. 1961 ஏ.; 1963 ஏ.) (ம. ப. 1971 செ.)

(i) $(\sqrt{3} - i)^{\frac{9}{5}}$

(j) $(-\sqrt{3} - i)^{\frac{3}{5}}$

(k) $(\cos 18^\circ + i \sin 18^\circ)^{\frac{1}{5}}$ (செ. ப. 1946 மா.)

(l) $(-1)^{\frac{1}{3}}$ (ம. ப. 1969 செ.)

(m) $(-1)^{\frac{1}{6}}$

(n) $(-1)^{\frac{1}{10}}$ (செ. ப. 1962 செ.)

(o) $(-i)^{\frac{1}{4}}$

(p) $32^{\frac{1}{5}}$

(q) $(-16)^{\frac{1}{4}}$

2. $\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$-ன் நான்கு மதிப்புகளின் தொடர் பெருக்கற் பலன் 1 என நிறுவுக.

3. $(1+i)$-ன் ஐந்தாம் மூலங்களைக் (5 th roots) கண்டுபிடித்து அவற்றின் பெருக்குத் தொகை $(1+i)$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1946 செ.)

4. $(\sqrt{3}-i)^{\frac{2}{5}}$-ன் எல்லா மதிப்புகளையும் கண்டுபிடித்து, அவற்றின் தொடர் பெருக்கற் பலனைக் காண்க. (செ. ப. 1965 ஏ.)

5. $(1+i)^{\frac{1}{3}}$-ன் மூன்று மதிப்புகளையும் கண்டுபிடித்து, அவைகளை ஆர்கன் வரை படத்தில் குறிக்க. (ம. ப. 1969 செ.)

6. $(\sqrt{3}-i)^{\frac{1}{7}}$-ன் எல்லா மதிப்புகளையும் காண்க; அவைகளை ஆர்கன் வரைபடத்தில் குறிக்க. (செ. ப. 1964 ஏ.)

7. $(i-1)^{\frac{1}{5}}$-ன் எல்லா மதிப்புகளையும் காண்க; அவற்றை ஆர்கன் வரை படத்தில் குறிக்க. (செ. ப. 1964 செ.)

8. $-\sqrt{3}+i$-ன் எல்லா ஐந்தாம் மூலங்களையும் (5 th roots) கண்டுபிடித்து, அவைகளை வரை கணித முறைப்படி குறிக்க.

(செ. ப. 1969 ஏ.)

9. $1-\cos\alpha + i\sin\alpha$, $(0 < \alpha < 2\pi)$ என்ற எண்ணின் எல்லா ஆறும் மூலங்களையும் கண்டுபிடித்து, அவைகளை வரை கணித முறைப்படி குறிக்க. (செ. ப. 1969 செ.)

10. 1-ன் எல்லா ஆறும் மூலங்களையும் கண்டுபிடிக்க. ஆர்கன் வரை படத்தில் அவைகளைக் குறிக்கும் புள்ளிகள் ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் உச்சிகள் என நிறுவுக.

11. $(i)^{\frac{1}{5}}$ என்ற புள்ளிகளை ஆர்கன் வரை படத்தில் குறிக்க; அவைகள் ஓர் ஒழுங்கு ஐங்கோணத்தின் உச்சிகள் என்பதைச் சரி பார்க்க. (ம. ப. 1970 ஏ.)

12. 1-ன் மூன்று மூன்றும் மூலங்களையும் ஆர்கன் வரை படத்தில் குறிக்க. (ம. ப. 1969 ஏ.)

13. 1-ன் மூன்றும் மூலங்களை ஆர்கன் வரை படத்தில் குறிக்க. $\omega$ என்பது 1-ன் ஒரு சிக்கல் மூன்றும் மூலம் (Complex cube root) எனில், படத்திலிருந்தே $\omega^2$ என்பது 1-ன் ஏனைய சிக்கல் மூன்றும் மூலம் என்றும், $1 + \omega + \omega^2 = 0$ என்றும் நிறுவுக.

(செ. ப. 1941 செ.)

14. ஆர்கன் வரைபடத்தில் ஒரு மெய் எண்ணின் $n$ ஆம் மூலங்களைக் ($n$ th roots) குறிக்கும் புள்ளிகள், $n$ பக்கங்களுடைய ஓர் ஒழுங்குப் பல கோணத்தின் உச்சிகள் என நிறுவுக.

(செ. ப. 1954 செ.)

15. $\omega$ என்பது 1-ன் ஒரு சிக்கல் மூன்றும் மூலம் எனில்,

$$\frac{1}{1+2\omega} - \frac{1}{1+\omega} + \frac{1}{2+\omega} = 0$$ என நிறுவுக. (செ. ப. 1946)

16. 1, $\omega$, $\omega^2$ என்பவை 1-ன் மூன்றும் மூலங்கள் எனில்.

$$\frac{3}{x^3-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x\omega - 1} + \frac{1}{x\omega^2 - 1}$$ என நிறுவுக.

17. $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ எனில், ஆர்கன் வரை படத்தில் $a + b$, $a + b\omega$, $a + b\omega^2$ என்ற எண்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகள் என்றும், அதன் சுற்று வட்ட மையம் '$a$' என்றும், சுற்றுவட்ட ஆரம் $b$ என்றும் நிறுவுக.

(செ. ப. 1939 மா.)

18. $\omega \neq 1$ என்பது 1-ன் ஒரு மூன்றும் மூலம் எனில், $(a + b\omega + c\omega^2)^3 + (a + b\omega^2 + c\omega)^3$ ஐச் சுருக்குக.

(செ. ப. 1969 செ.)

19. $\omega \neq 1$ என்பது 1-ன் ஒரு மூன்றும் மூலம். $z_1$, $z_2$, $z_3$ என்பவை எவையேனும் மூன்று சிக்கல் எண்கள் எனில்.

$$(z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3)\ (z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3)$$
$$= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 - z_1 z_2$$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1967 ஏ.)

20. $\omega \neq 1$ என்பது 1-ன் ஒரு மூன்றும் மூலம். $z_1$, $z_2$, $z_3$ என்பவை எவையேனும் மூன்று சிக்கல் எண்கள் எனில்,

$$z_1^2 + z_3^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1$$
$$= [(z_1 - z_2) + \omega (z_1 - z_3)]\ [(z_1 - z_2) + \omega^2 (z_1 - z_3)]$$

என நிறுவுக. இடக்கைப் பக்கம் $= 0$ எனில், $z_1$, $z_2$, $z_3$ என்ற

எண்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகள் என நிறுவுக. (செ. ப. 1969 ஏ.)

21. $(1+i\sqrt{3})^{\frac{3}{4}}+(1-i\sqrt{3})^{\frac{3}{4}}$-ன் ஒரு மதிப்பு $= \sqrt[4]{32}$ என நிறுவுக.

22. கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(a) $x^7-1=0$ (செ. ப. 1951 மா.)
(b) $x^{10}-1=0$
(c) $x^7+1=0$
(d) $x^8+1=0$

23. கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(a) $x^7+x^4+x^3+1=0$
(b) $x^9+x^5+x^4+1=0$ (ம. ப. 1968 ஏ.; 1970 ஏ.)
(c) $x^{15}+x^8+x^7+1=0$ (செ. ப. 1964 செ.)
(d) $x^7-x^4+x^3-1=0$ (ம. ப. 1971 செ.)
(e) $x^9-x^5+x^4-1=0$ (ம. ப. 1969 ஏ.)
(f) $x^{11}-x^7+x^4-1=0$ (செ. ப. 1961 செ.)
(g) $x^8-x^5+32x^3=32$ (செ. ப. 1966 ஏ.)
(h) $x^9+x^5-x^4-1=0$

24. கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(a) $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$
(b) $x^4-x^3+x^2-x+1=0$ (செ. ப. 1940 செ.)
(c) $x^{12}-x^{11}+x^{10}-\ldots\ldots\ldots-x^3+x^2-x+1=0$

25. கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(a) $x^4-x^2+1=0$
(b) $x^4-4x^2+16=0$
(c) $x^6+x^3+1=0$
(d) $x^8+4x^4+16=0$
(e) $x^{10}+2x^5+2=0$
(f) $x^{12}-x^6+1=0$ (செ. ப. 1962 ஏ.)
(g) $x^{16}-17x^8+16=0$ (செ. ப. 1953 மா.)

**26.** **கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.**

(a) $(5 + x)^5 - (5 - x)^5 = 0$

(b) $(z + 1)^5 + (z - 1)^5 = 0$

(c) $(z + 1)^6 + (z - 1)^6 = 0$

(d) $(x + 1)^5 + x^5 = 0$

(e) $(1 + x)^3 = i(1 - x)^3$

(f) $(x + i)^6 + (x - i)^6 = 0$

(g) $(x + 1)^n = (x - 1)^n$

(h) $(x + 1)^n = x^n$

(i) $(x - 1)^n = x^n$

(j) $(1 - x i)^n + i(1 + x i)^n = 0$

(k) $\left(\dfrac{1 + ix}{1 - ix}\right)^{2n+1} = 1$

27. $(z + 1)^5 = (z - 1)^5$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை ஆர்கன் வரை படத்தில் குறிக்கும் புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் உள்ளன என நிறுவுக.

28. $x^{12} = 1$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க. அதன் தீர்வுகளில் எவை $x^4 + x^2 + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கும் பொருந்தும் எனக் காண்க. (ம. ப. 1969 ஏ.)

29. $x^{10} = 1$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க. அதன் தீர்வுகளில் எவை $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கும் பொருந்துகின்றன எனக் காண்க.

30. $z^6 - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளில் $z^2 + z + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்தாதவற்றைக் காண்க.

31. $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ எனில், $\alpha + \alpha^2 + \alpha^4$, $\alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^7$ என்பவை, $x^2 + x + 2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என நிறுவுக. (செ. ப. 1951 மா.)

32. $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{13} + i\sin\dfrac{2\pi}{13}$ எனில், $\alpha + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^9 + \alpha^{10} + \alpha^{12}$, $\alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^6 + \alpha^7 + \alpha^8 + \alpha^{11}$ என்பவை $x^2 + x - 3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என நிரூபிக்க.

33. $\alpha = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$ எனில், $\alpha + \alpha^6, \alpha^2 + \alpha^5$ $\alpha^3 + \alpha^4$ என்பவை $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என நிறுவுக.

34. 1-ன் ஏழு ஏழாம் மூலங்களைக் காண்க. $n$ ஒரு நேர் முழு எண் எனில், $n$ ஆனது 7-ன் மடங்கு அல்லது 7-ன் மடங்கன்று என்பதைப் பொறுத்து அந்த ஏழு மூலங்களின் $n$ ஆம் அடுக்குகளின் கூட்டுத்தொகை 7 அல்லது 0 என நிறுவுக.

35. $\alpha = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ எனில்,

$$x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots\dots\dots + x^2 + x + 1$$

$$\equiv (x - \alpha)(x - \alpha^2) \dots\dots\dots (x - \alpha^{n-1})$$ என நிறுவுக.

36. $z = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$ எனில்,

$1 + z + z^2 + \dots\dots\dots\dots + z^{n-1} = 1 + i\cot\frac{\pi}{2n}$ என நிறுவுக.

## விடைகள்

1. (a) $2^{\frac{1}{6}}\ \text{cis}\left(\frac{2K\pi}{3} + \frac{\pi}{12}\right)$, K = 0, 1, 2

(b) $2^{\frac{1}{10}}\ \text{cis}\left(\frac{2K\pi}{5} + \frac{\pi}{20}\right)$, K = 0, 1, 2, 3, 4.

(c) $2^{\frac{1}{14}}\ \text{cis}\left(\frac{2K\pi}{7} + \frac{\pi}{28}\right)$, K = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

(d) $2^{\frac{1}{2}}\ \text{cis}\left(\frac{2K\pi}{3} + \frac{\pi}{12}\right)$, K = 0, 1, 2.

(e) $2^{\frac{1}{4}}\ \text{cis}\left(\frac{r\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$, $r$ = 0, 1, 2, 3.

(f) $2^{\frac{11}{3}}\ \text{cis}\left(\frac{2K\pi}{3} + \frac{11\pi}{9}\right)$, K = 0, 1, 2.

(g) $2^{\frac{1}{5}}\ \text{cis}\left(\frac{2K\pi}{5} + \frac{\pi}{30}\right)$, K = 0, 1, 2, 3, 4.

(h) $2^{\frac{1}{5}}$ cis $\left(\frac{2K\pi}{5} - \frac{\pi}{30}\right)$, K = 0, 1, 2, 3, 4.

(i) $2^{\frac{9}{5}}$ cis $\frac{(4K-3)\pi}{10}$, K = 0, 1, 2, 3, 4

அல்லது $2^{\frac{9}{5}}$ cis $\frac{3(12n-1)\pi}{10}$, $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

(j) $2^{\frac{2}{3}}$ cis $\frac{(6K-5)\pi}{9}$, K = 0, 1, 2.

அல்லது $2^{\frac{2}{3}}$ cis $\frac{(12n-5)\pi}{9}$, $n = 0, 1, 2$.

(k) cis $\left(\frac{K\pi}{3} + 3^\circ\right)$, K = 0, 1, 2, 3, 4, 5.

(l) $-1$, $\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$

(m) cis $\frac{(2n+1)\pi}{6}$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

(n) cis $\frac{(2n+1)\pi}{10}$, $n = 0, 1, 2, \ldots\ldots, 8, 9$.

(o) cis $\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$, $n = 0, 1, 2, 3$.

(p) 2 ; 2 cis $\frac{2n\pi}{5}$, $n = 1, 2, 3, 4$.

(q) $\sqrt{2}\,(\pm 1 \pm i)$

4. $2^{\frac{2}{5}}$ cis $\frac{(6K-1)\pi}{15}$, K = 0, 1, 2, 3, 4; $1 - i\sqrt{3}$.

5. $2^{\frac{1}{6}}$ cis $\left(\frac{2K\pi}{3} + \frac{\pi}{12}\right)$, K = 0, 1, 2.

6. $2^{\frac{1}{7}}$ cis $\frac{(12K-1)\pi}{42}$, K = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

7. $2^{\frac{1}{10}}$ cis $\frac{(8K+3)\pi}{20}$, K = 0, 1, 2, 3, 4.

8. $2^{\frac{1}{5}}$ cis $\frac{(12K+5)\pi}{30}$, K = 0, 1, 2, 3, 4.

9. $\left(2 \sin \frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{6}} \text{cis} \frac{(4K+1)\pi - \alpha}{12}$, $K = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

10. $\text{cis} \frac{2r\pi}{6}$, $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

22. (a) $\text{cis} \frac{2K\pi}{7}$, $K = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

(b) $\pm 1, \ \pm\left(\cos \frac{r\pi}{5} \pm i \sin \frac{r\pi}{5}\right)$, $r = 1, 2.$

(c) $\text{cis} \frac{(2K+1)\pi}{7}$, $K = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

(d) $\text{cis} \frac{(2K+1)\pi}{8}$, $K = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$

23. (a) $\text{cis} \frac{(2K+1)\pi}{3}$, $K = 0, 1, 2;$

$\text{cis} \frac{(2s+1)\pi}{4}$, $s = 0, 1, 2, 3.$

(b) $\text{cis} \frac{(2K+1)\pi}{4}$, $K = 0, 1, 2, 3;$

$\text{cis} \frac{(2s+1)\pi}{5}$, $s = 0, 1, 2, 3, 4.$

(c) $\text{cis} \frac{(2K+1)\pi}{7}$, $K = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6;$

$\text{cis} \frac{(2s+1)\pi}{8}$, $s = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$

(d) $1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\pm(1 \pm i)}{\sqrt{2}}$

(e) $\pm 1, \pm i, -1, \ \cos \frac{r\pi}{5} \pm i \sin \frac{r\pi}{5}$, $r = 1, 3.$

(f) $\text{cis} \frac{K\pi}{2}$, $K = 0, 1, 2, 3;$

$\text{cis} \frac{(2s+1)\pi}{7}$, $s = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

(g) $\text{cis}\,\frac{2K\pi}{3}$, $K = 0, 1, 2;$

$2\,\text{cis}\,\frac{(2s+1)\pi}{5}$, $s = 0, 1, 2, 3, 4.$

(h) $\text{cis}\,\frac{(2K+1)\pi}{4}$, $K = 0, 1, 2, 3;$

$\text{cis}\,\frac{2s\pi}{5}$, $s = 0, 1, 2, 3, 4.$

24. (a) $\text{cis}\,\frac{2n\pi}{7}$, $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

(b) $\text{cis}\,\frac{(2K+1)\pi}{5}$, $K = 0, 1, 3, 4.$

(c) $\cos\frac{(2K+1)\pi}{13} \pm i\sin\frac{(2K+1)\pi}{13}$,

$K = 0, 1, 2, 3, 4.$

25. (a) $\pm\frac{(\sqrt{3} \pm i)}{2}$

(b) $\pm\sqrt{3} \pm i$

(c) $\cos\left(\frac{2K\pi}{3} + \frac{2\pi}{9}\right) \pm i\sin\left(\frac{2K\pi}{3} + \frac{2\pi}{9}\right)$,

$K = 0, 1, 2.$

(d) $\sqrt{2}\left[\cos\frac{(3r+1)\pi}{6} \pm i\sin\frac{(3r+1)\pi}{6}\right]$,

$r = 0, 1, 2, 3.$

(e) $\sqrt[10]{2}\left[\cos\frac{(8K+3)\pi}{20} \pm i\sin\frac{(8K+3)\pi}{20}\right]$,

$K = 0, 1, 2, 3, 4.$

(f) $\cos\frac{(6K+1)\pi}{18} \pm i\sin\frac{(6K+1)\pi}{18}$,

$K = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

(g) $\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{K\pi}{4}$, $\text{cis}\,\frac{K\pi}{4}$, $K = 0, 1, 2, \ldots\ldots, 6, 7.$

26. (a) $5\, i \tan \frac{K\pi}{5}$, $K = 0, 1, 2, 3, 4.$

(b) $\pm\, i \cot \frac{\pi}{10}$, $\pm\, i \cot \frac{3\pi}{10}$, 0.

(c) $i \cot \frac{(2K+1)\pi}{12}$, $K = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

(d) $-\frac{1}{2}\left[1 + i \cot \frac{m\pi}{10}\right]$, $m = 1, 3, 5, 7, 9.$

(e) $i \tan \frac{(4K+1)\pi}{12}$, $K = 0, 1, 2.$

(f) $\cot \frac{(2r+1)\pi}{12}$, $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

(g) $-i \cot \frac{K\pi}{n}$, $K = 1, 2, \ldots\ldots, (n-1).$

(h) $-\frac{1}{2}\left[1 + i \cot \frac{K\pi}{n}\right]$, $K = 1, 2, \ldots\ldots, (n-1).$

(i) $\frac{1}{2}\left[1 + i \cot \frac{r\pi}{n}\right]$, $r = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots, (n-1).$

(j) $\tan \frac{(4r+1)\pi}{4n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots, (n-1).$

(k) $\tan \frac{r\pi}{2n+1}$, $r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \pm n$

28. (i) $\pm 1, \pm i, \pm\left(\cos \frac{\pi}{6} \pm i \sin \frac{\pi}{6}\right),$

$$\pm\left(\cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

(ii) $\pm\left(\cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

29. (i) $\pm 1, \pm\left(\cos \frac{\pi}{5} \pm i \sin \frac{\pi}{5}\right),$

$$\pm\left(\cos \frac{2\pi}{5} \pm i \sin \frac{2\pi}{5}\right)$$

(ii) $\cos\frac{2\pi}{5} \pm i\sin\frac{2\pi}{5}$, $-\cos\frac{\pi}{5} \pm i\sin\frac{\pi}{5}$

30. $\pm 1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

**4.9. *i*-ன் அடுக்குகள்**

$$\begin{aligned}
i^1 &= \phantom{-}i = (-1)^0 i \\
i^2 &= -1 = (-1)^1 \\
i^3 &= -i = (-1)^1 i \\
i^4 &= \phantom{-}1 = (-1)^2 \\
i^5 &= \phantom{-}i = (-1)^2 i \\
i^6 &= -1 = (-1)^3 \\
i^7 &= -i = (-1)^3 i \\
i^8 &= \phantom{-}1 = (-1)^4 \\
i^9 &= \phantom{-}i = (-1)^4 i \\
i^{10} &= -1 = (-1)^5 \\
i^{11} &= -i = (-1)^5 i \\
i^{12} &= \phantom{-}1 = (-1)^6 \\
i^{13} &= \phantom{-}i = (-1)^6 i
\end{aligned}$$

..............................

..............................

எனவே, $n$ ஆனது 4-ன் மடங்கானால், $i^n = 1$

அ-து, $\frac{n}{2}$ ஓர் இரட்டை எண் எனில், $i^n = 1$.

$n$ ஓர் இரட்டை எண்; ஆனால் $\frac{n}{2}$ ஓர் இரட்டை எண் அல்ல எனில், $i^n = -1$

ஆகவே, $n$ ஓர் இரட்டை எண் எனில், $i^n = \pm 1$ என்பது, $\frac{n}{2}$ ஓர் இரட்டை எண் அல்லது ஒற்றை எண் என்பதைப் பொறுத்தது.

எனவே, $n$ ஓர் இரட்டை எண் எனில்,

$$i^n = (-1)^{\frac{n}{2}} \qquad (93)$$

மேலும், $(n-1)$ ஆனது 4-ன் மடங்கானுல், $i^n = i$

அ-து, $\frac{n-1}{2}$ ஓர் இரட்டை எண் எனில், $i^n = i$

$(n-1)$ ஓர் இரட்டை எண்; ஆனுல் $\frac{n-1}{2}$ ஓர் இரட்டை எண் அல்ல எனில், $i^n = -i$

ஆகவே, $n-1$ ஓர் இரட்டை எண் எனில், $i^n = \pm i$ என்பது, $\frac{n-1}{2}$ ஓர் இரட்டை எண் அல்லது ஒற்றை எண் என்பதைப் பொறுத்தது.

எனவே, $n$ ஓர் ஒற்றை எண் எனில்,

$$i^n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} . i \qquad (94)$$

**4.10.** $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ என்பவற்றின் விரித்தல்கள் (Expansions of $\cos n\theta$ and $\sin n\theta$)

$n$ ஒரு நேர் முழு எண் எனில், டிமாவியரின் தேற்றப்படி

$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$ ......................(i)

வலக்கைப் பக்கம் உள்ளதை, ஈருறுப்புத் தேற்றப்படி (Binomial Theorem) விரித்து எழுத,

$$\cos n\theta + i\sin n\theta$$
$$= \cos^n\theta + nC_1 \cos^{n-1}\theta . i\sin\theta + nC_2\cos^{n-2}\theta . i^2\sin^2\theta$$
$$+ nC_3\cos^{n-3}\theta . i^3\sin^3\theta + nC_4\cos^{n-4}\theta . i^4\sin^4\theta$$
$$+ nC_5\cos^{n-5}\theta . i^5\sin^5\theta + \ldots\ldots$$
$$+ nC_{n-1}\cos\theta . i^{n-1}\sin^{n-1}\theta + nC_n i^n \sin^n\theta \ldots\ldots(ii)$$

**வகை 1.** $n$ ஓர் ஒற்றை எண். அதாவது $(n-1)$ ஓர் இரட்டை எண்.

$\therefore \; i^n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} . i$ [சூத்திரம் (94)-ன் படி]

$\therefore \; i^{n-1} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$

எனவே, $\cos n\theta + i \sin n\theta$

$$= \cos^n \theta + i\, n C_1 \cos^{n-1}\theta \,.\, \sin\theta - n C_2 \cos^{n-2}\theta \,.\, \sin^2\theta - i\, n C_3 \cos^{n-3}\theta \,.\, \sin^3\theta + n C_4 \cos^{n-4}\theta \,.\, \sin^4\theta + i^5\, n C_5 \cos^{n-5}\theta \,.\, \sin^5\theta + \ldots\ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} n C_{n-1} \cos\theta \,.\, \sin^{n-1}\theta + i(-1)^{\frac{n-1}{2}} n C_n \sin^n\theta$$

மெய், கற்பனைப் பகுதிகளை முறையே சமப்படுத்த,

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - n C_2 \cos^{n-2}\theta \,.\, \sin^2\theta + n C_4 \cos^{n-4}\theta \,.\, \sin^4\theta - \ldots\ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} n C_{n-1} \cos\theta \,.\, \sin^{n-1}\theta \quad (95)$$

$$\sin n\theta = n C_1 \cos^{n-1}\theta \,.\, \sin\theta - n C_3 \cos^{n-3}\theta \,.\, \sin^3\theta + n C_5 \cos^{n-5}\theta \,.\, \sin^5\theta - \ldots\ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} n C_n \sin^n\theta \quad (96)$$

வகை 2. $n$ ஓர் இரட்டை எண். அதாவது, $n - 1$ ஓர் ஒற்றை எண்.

$$\therefore \quad i^n = (-1)^{\frac{n}{2}} \qquad \text{[சூத்திரம் (93)-ன் படி]}$$

$$i^{n-1} = (-1)^{\frac{n-2}{2}} . i$$

எனவே, $\cos n\theta + i \sin n\theta$

$$= \cos^n\theta + i\, n C_1 \cos^{n-1}\theta \,.\, \sin\theta - n C_2 \cos^{n-2}\theta \,.\, \sin^2\theta - i\, n C_3 \cos^{n-3}\theta \,.\, \sin^3\theta + n C_4 \cos^{n-4}\theta \,.\, \sin^4\theta + i\, n C_5 \cos^{n-5}\theta \,.\, \sin^5\theta - \ldots\ldots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} i\, n C_{n-1} \cos\theta \,.\, \sin^{n-1}\theta + (-1)^{\frac{n}{2}} n C_n \sin^n\theta.$$

மெய், கற்பனைப் பகுதிகளை முறையே சமப்படுத்த,

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - n C_2 \cos^{n-2}\theta \,.\, \sin^2\theta + n C_4 \cos^{n-4}\theta \,.\, \sin^4\theta - \ldots\ldots + (-1)^{\frac{n}{2}} n C_n \sin^n\theta \quad (97)$$

குறிப்பு :

1. $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ ஆகியவைகளின் விரித்தல்களில், உறுப்புகள் மாறி மாறி, நேர், எதிர்க் குறிகளை உடையனவாக (alternately with positive and negative signs) உள்ளன.

2. ஒவ்வோர் உறுப்பிலும் $\cos\theta$, $\sin\theta$ ஆகியவைகளின் அடுக்குகளின் கூட்டுத் தொகை $n$ ஆகும்.

3. இரண்டு விரித்தல்களுமே $\cos\theta$ -ன் இறங்கு அடுக்குகளிலும் (descending powers of $\cos\theta$), $\sin\theta$ -ன் ஏறு அடுக்குகளிலும் (ascending powers of $\sin\theta$) அமைந்துள்ளன.

4. $\cos n\theta = \cos^n\theta - nC_2 \cos^{n-2}\theta . \sin^2\theta +$

$nC_4 \cos^{n-4}\theta . \sin^4\theta - \ldots\ldots$

$= \cos^n\theta - nC_2 \cos^{n-2}\theta\,[1-\cos^2\theta] + nC_4 \cos^{n-4}\theta$

$[1-\cos^2\theta]^2 - \ldots\ldots$

எனவே, $\cos n\theta$ என்பது $\cos\theta$ -ன் $n$ படிக் கோவை ($n$ th degree expression in $\cos\theta$) ஆகும்.

5. $\cos n\theta$ -ன் விரித்தலில், $\cos^n\theta$ -ன் குணகம் (coefficient)

$= 1 + nC_2 + nC_4 + \ldots\ldots$

$= nC_0 + nC_2 + nC_4 + \ldots\ldots$

$= 2^{n-1}$

6. $\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta} = nC_1 \cos^{n-1}\theta - nC_3 \cos^{n-3}\theta . \sin^2\theta$

$+ nC_5 \cos^{n-5}\theta . \sin^4\theta - \ldots\ldots$

$= nC_1 \cos^{n-1}\theta - nC_3 \cos^{n-3}\theta\,[1-\cos^2\theta]$

$+ nC_5 \cos^{n-5}\theta\,[1-\cos^2\theta]^2 - \ldots\ldots$

எனவே, $\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ என்பது $\cos\theta$ -ன் $(n-1)$ படிக் கோவை ஆகும்.

7. $\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ -ன் விரித்தலில், $\cos^{n-1}\theta$ -ன் குணகம்

$= nC_1 + nC_3 + nC_5 + \ldots\ldots$

$= 2^{n-1}$

8. $n$ ஓர் இரட்டை எண் எனில், $\cos n\theta$ என்பது $\sin\theta$ -ன் $n$ படிக் கோவையாகும்.

9. $n$ ஓர் ஒற்றை எண் எனில், $\sin n\theta$ என்பது $\sin\theta$ -ன் $n$ படிக் கோவையாகும்.

**4. 11.** $\tan n\theta$ **-ன் விரித்தல்**

$$\tan n\theta = \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta}$$

$$= \frac{nC_1 \cos^{n-1}\theta . \sin\theta - nC_3 \cos^{n-3}\theta . \sin^3\theta + nC_5 \cos^{n-5}\theta . \sin^5\theta - ..}{\cos^n\theta - nC_2 \cos^{n-2}\theta . \sin^2\theta + nC_4 \cos^{n-4}\theta . \sin^4\theta - ..........}$$

வலக்கைப் பக்கம், தொகுதியையும் பகுதியையும் $\cos^n\theta$ ஆல் வகுக்கவே,

$$\tan n\theta = \frac{nC_1 \tan\theta - nC_3 \tan^3\theta + nC_5 \tan^5\theta - ...}{1 - nC_2 \tan^2\theta + nC_4 \tan^4\theta - .........} \qquad (99)$$

**குறிப்பு :**

1. $n$ ஓர் ஒற்றை எண் எனில்,

$$\tan n\theta = \frac{nC_1 \tan\theta - nC_3 \tan^3\theta + nC_5 \tan^5\theta - ...}{1 - nC_2 \tan^2\theta + nC_4 \tan^4\theta - ........}$$

$$\frac{... + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \tan^n\theta}{... + (-1)^{\frac{n-1}{2}} {}_nC_{n-1} \tan^{n-1}\theta} \qquad (100)$$

2. $n$ ஓர் இரட்டை எண் எனில்,

$$\tan n\theta = \frac{nC_1 \tan\theta - nC_3 \tan^3\theta + nC_5 \tan^5\theta - ...}{1 - nC_2 \tan^2\theta + nC_4 \tan^4\theta - ......}$$

$$\frac{... + (-1)^{\frac{n-2}{2}} nC_{n-1} \tan^{n-1}\theta}{... + (-1)^{\frac{n}{2}} nC_n \tan^n\theta} \qquad (101)$$

**4 . 12.** $\tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + ........ + \theta_n)$ **-ன் விரித்தல்**

$$\cos(\theta_1 + \theta_2 + ...... + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + ...... + \theta_n)$$

$$= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)........$$

$$(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)......... \quad (i)$$

என்று நாம் அறிவோம்.

ஆனல், $\cos\theta_1 + i\sin\theta_1 = \cos\theta_1(1 + i\tan\theta_1)$

$\cos\theta_2 + i\sin\theta_2 = \cos\theta_2(1 + i\tan\theta_2)$

..................................................

..................................................

$\cos\theta_n + i\sin\theta_n = \cos\theta_n(1 + i\tan\theta_n)$.

எனவே, (i)-லிருந்து

$$\cos(\theta_1+\theta_2+\dots\dots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\dots\dots+\theta_n)$$
$$=\cos\theta_1.\cos\theta_2\dots\dots\cos\theta_n\,[1+i\tan\theta_1]\,[1+i\tan\theta_2]\dots\dots[1+i\tan\theta_n]$$
$$=\cos\theta_1.\cos\theta_2\dots\dots\dots\dots\cos\theta_n\times$$
$$[1+i\Sigma\tan\theta_1+i^2\Sigma\tan\theta_1\tan\theta_2+i^3\Sigma\tan\theta_1.\tan\theta_2.\tan\theta_3+\dots\dots+i^n\tan\theta_1.\tan\theta_2\dots\dots\tan\theta_n]$$

$\tan\theta_1, \tan\theta_2, \tan\theta_3, \dots\dots, \tan\theta_n$ என்ற $n$ எண்களிலிருந்து ஒவ்வொரு தடவையும் $r$ எண்களை எடுத்துப் பெருக்குவதால் கிடைக்கும் பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத் தொகையை $S_r$ என்று குறித்தால்,

$$S_r=\Sigma\tan\theta_1.\tan\theta_2\dots\dots\tan\theta_r.$$
$$\therefore\cos(\theta_1+\theta_2+\dots\dots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\dots\dots+\theta_n)$$
$$=\cos\theta_1.\cos\theta_2\dots\dots\cos\theta_n\times[1+iS_1-S_2-iS_3+S_4+iS_5-S_6-iS_7+S_8+iS_9-\dots\dots]$$

மெய், கற்பனைப் பகுதிகளை முறையே சமப்படுத்த,

$$\cos(\theta_1+\theta_2+\dots\dots+\theta_n)$$
$$=\cos\theta_1.\cos\theta_2\dots\dots\cos\theta_n\,[1-S_2+S_4-S_6+\dots\dots]\quad\dots\dots\text{(ii)}$$
$$\sin(\theta_1+\theta_2+\dots\dots+\theta_n)$$
$$=\cos\theta_1\cos\theta_2\dots\dots\cos\theta_n\,[S_1-S_3+S_5-S_7+\dots]\quad\dots\dots\text{(iii)}$$

(iii) ஐ (ii) ஆல் வகுக்க,

$$\tan(\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_n)=\frac{S_1-S_3+S_5-S_7+\dots\dots}{1-S_2+S_4-S_6+\dots\dots}\quad(102)$$

**குறிப்பு :**

1. $n=2K+1$ எனில்,

$$\tan(\theta_1+\theta_2+\dots\dots+\theta_n)=\frac{S_1-S_3+S_5-S_7+\dots(-1)^K S_{2K+1}}{1-S_2+S_4-S_6+\dots+(-1)^K S_{2K}}\quad(103)$$

2. $n=2K$ எனில்,

$$\tan(\theta_1+\theta_2+\dots\dots+\theta_n)=\frac{S_1-S_3+S_5-S_7+\dots+(-1)^{K-1}S_{2K-1}}{1-S_2+S_4-S_6+\dots\dots+(-1)^K S_{2K}}\quad(104)$$

3. $\theta_1=\theta_2=\dots\dots=\theta_n=\theta$ எனில்,

$$\theta_1+\theta_2+\dots\dots+\theta_n=n\theta,$$
$$S_r=\Sigma\tan\theta_1.\tan\theta_2.\dots\dots\tan\theta_r$$
$$=nC_r\tan^r\theta$$
$$\therefore\tan n\theta=\frac{nC_1\tan\theta-nC_3\tan^3\theta+nC_5\tan^5\theta-\dots\dots\dots}{1-nC_2\tan^2\theta+nC_4\tan^4\theta-\dots\dots\dots}\quad(99)$$

## மாதிரிக் கணக்குகள்

**மாதிரிக் கணக்கு 4 13.1.**

**$\sin\theta$, $\cos\theta$ ஆகியவற்றின் அடுக்குகளின் மூலம், $\sin 8\theta$ ஐ விரித்தெழுதுக.**

(ம. ப. 1969 செ.)

டிமாவியரின் தேற்றப்படி,

$$\cos 8\theta + i\sin 8\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^8$$

$\cos\theta = c$, $\sin\theta = s$ என்று குறித்தோமானால்,

$$\cos 8\theta + i\sin 8\theta = (c+is)^8$$

$$= c^8 + {}_8C_1\, c^7.\, is + {}_8C_2\, c^6.\, i^2 s^2 + {}_8C_3\, c^5.\, i^3 s^3 + {}_8C_4\, c^4.\, i^4 s^4 + {}_8C_5\, c^3.\, i^5 s^5 + {}_8C_6\, c^2.\, i^6 s^6 + {}_8C_7\, c.\, i^7 s^7 + {}_8C_8\, i^8 s^8.$$

$$= c^8 + 8i\, c^7 s - 28\, c^6 s^2 - 56 i\, c^5 s^3 + 70\, c^4 s^4 + 56 i\, c^3 s^5 - 28\, c^2 s^6 - 8\, i\, c s^7 + s^8.$$

கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த,

$$\sin 8\theta = 8\, c^7 s - 56\, c^5 s^3 + 56\, c^3 s^5 - 8\, c\, s^7$$

$$= 8\cos^7\theta.\ \sin\theta - 56\cos^5\theta.\ \sin^3\theta + 56\cos^3\theta\ .\ \sin^5\theta - 8\cos\theta.\ \sin^7\theta.$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-13.2.**

$\cos\theta$-ன் அடுக்குகளின் மூலம் $\dfrac{\sin 7\theta}{\sin\theta}$ ஐ விரித்தெழுதுக.

(செ. ப. 1964 செ.)

டிமாவியரின் தேற்றப்படி,

$$\cos 7\theta + i\sin 7\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^7$$

$\cos\theta = c$, $\sin\theta = s$ என்று குறித்தோமானால்,

$$\cos 7\theta + i\sin 7\theta = (c+is)^7$$

$$= c^7 + {}_7C_1\, c^6.\, is + {}_7C_2\, c^5.\, i^2 s^2 + {}_7C_3\, c^4.\, i^3 s^3 + {}_7C_4\, c^3.\, i^4 s^4 + {}_7C_5\, c^2.\, i^5 s^5 + {}_7C_6\, c.\, i^6 s^6 + {}_7C_7\, i^7 s^7$$

$$= c^7 + 7i\, c^6 s - 21\, c^5 s^2 - 35 i\, c^4 s^3 + 35\, c^3 s^4 + 21\, i\, c^2 s^5 - 7\, c\, s^6 - i\, s^7$$

கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த,

$$\sin 7\theta = 7c^6 s - 35\, c^4 s^3 + 21\, c^2 s^5 - s^7$$

$$= s\,[\,7c^6 - 35\, c^4 s^2 + 21\, c^2 s^4 - s^6]$$

$$= s\,[\,7c^6 - 35\, c^4 s^2 + 21\, c^2 (s^2)^2 - (s^2)^3]$$

$$= s\,[\,7c^6 - 35\, c^4 (1 - c^2) + 21 c^2 (1 - c^2)^2 - (1 - c^2)^3]$$

$$= s\,[\,7c^6 - 35\,c^4\,(1-c^2) + 21\,c^2\,(1 - 2c^2 + c^4) - (1-3c^2 + 3c^4 - c^6)]$$

$$= s\,[\,7c^6 - 35c^4 + 35c^6 + 21c^2 - 42c^4 + 21c^6 - 1 + 3c^2 - 3c^4 + c^6]$$

$$= s\,[\,64\,c^6 - 80\,c^4 + 24\,c^2 - 1]$$

$$= \sin\theta\,[\,64\cos^6\theta - 80\cos^4\theta + 24\cos^2\theta - 1]$$

$$\therefore\ \frac{\sin 7\theta}{\sin\theta} = 64\cos^6\theta - 80\cos^4\theta + 24\cos^2\theta - 1$$

**மாதிரிக் கணக்கு: 4-13.3.**

$\cos 6\theta = 1 - 18\sin^2\theta + 48\sin^4\theta - 32\sin^6\theta$ என நிறுவுக.

டிமாவியரின் தேற்றப்படி,

$$\cos 6\theta + i\sin 6\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^6$$

$\cos\theta = c$, $\sin\theta = s$ என்று குறித்தோமானல்,

$$\cos 6\theta + i\sin 6\theta = (c + i\,s)^6$$

$$= c^6 + {}_6C_1\,c^5.\ i\,s + {}_6C_2\,c_4\,.\ i^2 s^2 + {}_6C_3\,c^3.\ i^3 s^3 + {}_6C_4\,c^2\,.\ i^4 s^4 + {}_6C_5\,c\,.\ i^5 s^5 + {}_6C_6\,i^6 s^6$$

$$= c^6 + 6\,i\,c^5 s - 15\,c^4 s^2 - 20\,i\,c^3 s^3 + 15\,c^2 s^4 + 6\,i\,cs^5 - s^6$$

மெய்ப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த,

$$\cos 6\theta = c^6 - 15\,c^4 s^2 + 15\,c^2 s^4 - s^6$$

$$= (c^2)^3 - 15\,s^2\,(c^2)^2 + 15\,s^4\,c^2 - s^6$$

$$= (1 - s^2)^3 - 15\,s^2\,(1 - s^2)^2 + 15\,s^4\,(1 - s^2) - s^6$$

$$= 1 - 3\,s^2 + 3\,s^4 - s^6 - 15\,s^2\,(1 - 2s^2 + s^4) + 15\,s^4\,(1 - s^2) - s^6$$

$$= 1 - 3\,s^2 + 3\,s^4 - s^6 - 15\,s^2 + 30\,s^4 - 15\,s^6 + 15\,s^4 - 15\,s^6 - s^6$$

$$= 1 - 18\,s^2 + 48\,s^4 - 32\,s^6$$

$$= 1 - 18\sin^2\theta + 48\sin^4\theta - 32\sin^6\theta$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-13.4.**

$\tan 9\theta$ ஐ விரித்தெழுதுக.

$$\tan 9\theta = \frac{{}_9C_1\tan\theta - {}_9C_3\tan^3\theta + {}_9C_5\tan^5\theta - {}_9C_7\tan^7\theta + {}_9C_9\tan^9\theta}{1 - {}_9C_2\tan^2\theta + {}_9C_4\tan^4\theta - {}_9C_6\tan^6\theta + {}^6C_8\tan^6\theta}$$

$$= \frac{9\tan\theta - 84\tan^3\theta + 126\tan^5\theta - 36\tan^7\theta + \tan 9\theta}{1 - 36\tan^2\theta + 126\tan^4\theta - 84\tan^6\theta + 9\tan^8\theta}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-13.5.**

$\alpha, \beta, \gamma$ என்பவை $x^3 + p x^2 + q x + p = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்; $q \neq 1$ எனில்,

$\tan^{-1} \alpha + \tan^{-1} \beta + \tan^{-1} \gamma = n\pi$ ஆரையன்கள் (Radians) என நிறுவுக.

கொடுத்துள்ள சமன்பாடு

$$x^3 + px^2 + q x + p = 0 \qquad \text{.................(i)}$$

$\tan^{-1} \alpha = \theta_1$, $\tan^{-1} \beta = \theta_2$, $\tan^{-1} \gamma = \theta_3$ என இருக்கட்டும்

இப்பொழுது, $\alpha = \tan\theta_1$, $\beta = \tan\theta_2$, $\gamma = \tan\theta_3$

கொள்கைப்படி, $\alpha, \beta, \gamma$ என்பவை (i)-ன் தீர்வுகள்.

$$\therefore \quad S_1 = \tan\theta_1 + \tan\theta_2 + \tan\theta_3 = -p \qquad \text{........... (ii)}$$

$$S_2 = \tan\theta_1 . \tan\theta_2 + \tan\theta_1 . \tan\theta_3 + \tan\theta_2 . \tan\theta_3 = q \qquad \text{........... (iii)}$$

$$S_3 = \tan\theta_1 . \tan\theta_2 . \tan\theta_3 = -p \qquad \text{........... (iv)}$$

இப்பொழுது, சூத்திரம் (102)-ன் படி,

$$\tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \frac{S_1 - S_3}{1 - S_2}$$

$$= \frac{-p + p}{1 - q} \qquad \text{[ (ii), (iii), (iv)-லிருந்து]}$$

கொள்கைப்படி, $q \neq 1$.

$$\therefore \quad \tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = 0$$

$$\therefore \quad \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = n\pi \text{ ஆரையன்கள்.}$$

அ-து, $\tan^{-1} \alpha + \tan^{-1} \beta + \tan^{-1} \gamma = n\pi$ ஆரையன்கள்.

**மாதிரிக் கணக்கு 4-13.6.**

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ என்பவை $\tan 2\theta = \lambda \tan(\theta + \alpha)$ என்ற சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்தும் $\theta$-ன் மூன்று மதிப்புகள்; இவற்றுள் எந்த இரண்டிற்கும் உள்ள வேறுபாடு $\pi$-ன் மடங்கல்ல எனில், $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \alpha = \pi$-ன் மடங்கு என நிறுவுக.

கொடுத்துள்ள சமன்பாடு $\tan 2\theta = \lambda \tan(\theta + \alpha)$ ......... (i)

$$\text{அ-து,} \quad \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} = \lambda \left[ \frac{\tan\theta + \tan\alpha}{1 - \tan\theta . \tan\alpha} \right]$$

அதாவது,

$$\lambda \tan^3\theta + (\lambda\tan\alpha - 2\tan\alpha)\tan^2\theta + (2 - \lambda)\tan\theta - \lambda\tan\alpha = 0 \qquad \text{........... (ii)}$$

இது tan $\theta$-ல் முப்படிச் சமன்பாடு (Cubic Equation in tan $\theta$) ஆகும். எனவே, இதற்கு மூன்று தீர்வுகள் உண்டு. அவைகள் tan $\theta_1$, tan $\theta_2$, tan $\theta_3$ எனில்,

$$S_1 = \tan\theta_1 + \tan\theta_2 + \tan\theta_3$$

$$= -\frac{(\lambda \tan\alpha - 2\tan\alpha)}{\lambda}$$

$$= \frac{(2-\lambda)}{\lambda}\tan\alpha \qquad \text{............ (iii)}$$

$$S_2 = \tan\theta_1 . \tan\theta_2 + \tan\theta_1 . \tan\theta_3 + \tan\theta_2 . \tan\theta_3$$

$$= \frac{(2-\lambda)}{\lambda} \qquad \text{............ (iv)}$$

$$S_3 = \tan\theta_1 . \tan\theta_2 . \tan\theta_3$$

$$= -\frac{(-\lambda\tan\alpha)}{\lambda}$$

$$= \tan\alpha \qquad \text{............ (v)}$$

இப்பொழுது, சூத்திரம் (102)-ன் படி,

$$\tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \frac{S_1 - S_3}{1 - S_2}$$

$$= \frac{\frac{(2-\lambda)}{\lambda}\tan\alpha - \tan\alpha}{1 - \frac{(2-\lambda)}{\lambda}} \quad \text{[(iii), (iv), (v)-லிருந்து]}$$

$$= -\tan\alpha\,\frac{\left(1 - \frac{(2-\lambda)}{\lambda}\right)}{\left(1 - \frac{(2-\lambda)}{\lambda}\right)}$$

$$= -\tan\alpha\,\frac{(\lambda - 1)}{(\lambda - 1)}$$

$$= -\tan\alpha, \qquad \lambda \neq 1 \text{ எனில்}$$

$$= \tan(-\alpha)$$

எனவே, சூத்திரம் (3)-ன் படி,

$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = n\pi + (-\alpha)$, $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

$$\therefore \quad \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \alpha = n\pi$$

$= \pi$-ன் மடங்கு.

$\lambda = 1$ எனில், கொடுத்துள்ள சமன்பாடு

$$\tan 2\theta = \tan(\theta + \alpha) \text{ என்று ஆகிறது.}$$

எனவே, சூத்திரம் (3)-ன் படி,

$2\theta = n\pi + \theta + \alpha$, $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

$$\therefore \quad \theta = n\pi + \alpha$$

எனவே, $\theta$-ன் எந்த இரு மதிப்புகளுக்கும் உள்ள வேறுபாடு $\pi$-ன் மடங்காகும். இம்முடிவு கொள்கைக்கு முரண்பாடாக உள்ளது.

$$\therefore \quad \lambda \neq 1$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-13.7.**

$\sin 3\theta = a\sin\theta + b\cos\theta + c$ **என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஆறு தீர்வுகள் உண்டு எனக் காட்டுக. அவைகள்** $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ **எனில்,**

$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 = \pi$**-ன் ஒற்றை மடங்கு** (Odd Multiple of $\pi$) **என நிறுவுக.** (ம. ப. 1971 செ.)

கொடுத்துள்ள சமன்பாடு

$$\sin 3\theta = a\sin\theta + b\cos\theta + c.$$

அ-து, $3\sin\theta - 4\sin^3\theta = a\sin\theta + b\cos\theta + c \,\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$

$\tan\dfrac{\theta}{2} = t$ என்று குறித்தோமானால்,

$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

இம்மதிப்புகளை (i)-ல் இட,

$$3\frac{2t}{(1+t^2)} - 4\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3 = a\frac{2t}{(1+t^2)} + b\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) + c$$

அ-து, $(b-c)t^6 - 2(a-3)t^5 + (b-3c)t^4 - 4(a+5)t^3 - (b+3c)t^2 - 2(a-3)t - (b+c) = 0 \,\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$

இது $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$-ல் அறுபடிச் சமன்பாடு (6 th degree equation in $\tan\dfrac{\theta}{2}$) ஆகும்.

எனவே, இதற்கு ஆறு தீர்வுகள் உண்டு. அவைகள் $t_1 = \tan\dfrac{\theta_1}{2}$, $t_2 = \tan\dfrac{\theta_2}{2}$, $t_3 = \tan\dfrac{\theta_3}{2}$, $t_4 = \tan\dfrac{\theta_4}{2}$, $t_5 = \tan\dfrac{\theta_5}{2}$, $t_6 = \tan\dfrac{\theta_6}{2}$ எனில், $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ என்பவை (i)-ன் தீர்வுகள்.

அ-து, (i)-க்கு ஆறு தீர்வுகள் உண்டு.
இப்பொழுது,

$$S_1 = \Sigma t_1 = \frac{2(a-3)}{b-c}$$

$$S_2 = \Sigma t_1 t_2 = \frac{b-3c}{b-c}$$

$$S_3 = \Sigma t_1 t_2 t_3 = \frac{4(a+5)}{b-c}$$

$$S_4 = \Sigma t_1 t_2 t_3 t_4 = -\frac{(b+3c)}{b-c}$$

$$S_5 = \Sigma t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 = \frac{2(a-3)}{b-c}$$

$$S_6 = t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 = -\frac{(b+c)}{b-c}$$

$$\therefore \quad 1 - S_2 + S_4 - S_6 = 1 - \frac{(b-3c)}{b-c} - \frac{(b+3c)}{b-c} + \frac{b+c}{b-c}$$

$$= \frac{0}{b-c}$$

$$= 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(iii)}$$

$$S_1 - S_3 + S_5 \neq 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(iv)}$$

இப்பொழுது,

$$\cot\left(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2} + \frac{\theta_3}{2} + \frac{\theta_4}{2} + \frac{\theta_5}{2} + \frac{\theta_6}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2} + \frac{\theta_3}{2} + \frac{\theta_4}{2} + \frac{\theta_5}{2} + \frac{\theta_6}{2}\right)}$$

$$= \frac{1 - S_2 + S_4 - S_6}{S_1 - S_3 + S_5} \qquad \text{[சூத்திரம் (102)-ன் படி]}$$

$$= 0 \qquad \text{[(iii), (iv)-லிருந்து]}$$

$$= \cot\frac{\pi}{2}$$

எனவே, 1·5-ன் துணை முடிவின் படி,

$$\frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2} + \frac{\theta_3}{2} + \frac{\theta_4}{2} + \frac{\theta_5}{2} + \frac{\theta_6}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2},$$ $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

$$\therefore \quad \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 = 2n\pi + \pi$$
$$= (2n+1)\pi$$
$= \pi$-ன் ஒற்றை மடங்கு.

**மாதிரிக் கணக்கு 4-13. 8.**

$\cos\frac{2\pi}{7}, \cos\frac{4\pi}{7}, \cos\frac{6\pi}{7}$ என்ற மூன்றும், $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என நிறுவுக.

(செ. ப. 1957 செ.)
(ம. ப. 1970 ஏ.)
(ம. ப. 1971 ஏ.)

இந்த முடிவைப் பயன்படுத்தி,

(a) $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$

(b) $\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{3\pi}{7} = \frac{7}{4}$

(c) $\cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} \cdot \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$

(d) $\cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7} \cdot \cos\frac{6\pi}{7} = \frac{1}{8}$ என நிரூபிக்க.

**செய்முறை 1:**

$y = \cos\theta + i\sin\theta$,

$$\theta = \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}, \frac{8\pi}{7}, \frac{10\pi}{7}, \frac{12\pi}{7}, \frac{14\pi}{7} = 2\pi$$

எனில், $y^7 = \cos 7\theta + i\sin 7\theta = 1$

அ-து, $y^7 - 1 = 0$

அ-து, $(y-1)(y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1) = 0$ .........(i)

(i)-ன் $y = 1$ என்ற தீர்வு $\theta = 2\pi$ என்பதற்கு ஒத்தது.

எனவே, $y = \cos\theta + i\sin\theta, \theta = \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}, \frac{8\pi}{7}, \frac{10\pi}{7}, \frac{12\pi}{7}$ என்பவைகள்,

$y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0$ .................. (ii)

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

சமன்பாடு (ii) ஐ $y^3$ ஆல் வகுக்க,

$$y^3 + y^2 + y + 1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3} = 0$$

அ-து, $\left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right) + \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right) + 1 = 0$ ...... (iii)

$$y + \frac{1}{y} = \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta$$

$= 2\cos\theta = 2x$ என எடுத்துக் கொண்டால்,

$$y^2 + \frac{1}{y^2} = \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 - 2$$

$$= 4x^2 - 2$$

$$y^3 + \frac{1}{y^3} = \left(y + \frac{1}{y}\right)^3 - 3\left(y + \frac{1}{y}\right)$$

$$= 8x^3 - 6x$$

எனவே, சமன்பாடு (iii), கீழ்க் கண்டவாறு மாறுகிறது.

$$8x^3 - 6x + 4x^2 - 2 + 2x + 1 = 0$$

அ-து, $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$ .............................. (iv)

$$x = \cos\frac{2\pi}{7}, \cos\frac{4\pi}{7}, \cos\frac{6\pi}{7}, \cos\frac{8\pi}{7}, \cos\frac{10\pi}{7}, \cos\frac{12\pi}{7}$$

என்பவை (iv)-ன் தீர்வுகள்.

ஆனால், $\cos\frac{12\pi}{7} = \cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{7}\right) = \cos\frac{2\pi}{7}$

$$\cos\frac{10\pi}{7} = \cos\left(2\pi - \frac{4\pi}{7}\right) = \cos\frac{4\pi}{7}$$

$$\cos\frac{8\pi}{7} = \cos\left(2\pi - \frac{6\pi}{7}\right) = \cos\frac{6\pi}{7}$$

எனவே, $\cos\frac{2\pi}{7}, \cos\frac{4\pi}{7}, \cos\frac{6\pi}{7}$ என்பவை சமன்பாடு (iv)-ன் தீர்வுகள்.

$$\therefore \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

அ-து, $1 - 2\sin^2\frac{\pi}{7} + 1 - 2\sin^2\frac{2\pi}{7} + 1 - 2\sin^2\frac{3\pi}{7} = -\frac{1}{2}$

அ-து, $2\left[\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7}\right]=\frac{7}{2}$

$$\therefore\quad \sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7}=\frac{7}{4}$$

மேலும்,

$$\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{(-1)}{8}=\frac{1}{8}$$

**செய்முறை 2:**

சூத்திரம் (95)-ன் படி,

$$\cos 7\theta = \cos^7\theta - {}_7C_2\cos^5\theta\cdot\sin^2\theta + {}_7C_4\cos^3\theta\cdot\sin^4\theta - {}_7C_6\cos\theta\cdot\sin^6\theta$$

$$=\cos^7\theta - 21\cos^5\theta\cdot\sin^2\theta + 35\cos^3\theta\cdot\sin^4\theta - 7\cos\theta\cdot\sin^6\theta$$

$$=\cos^7\theta - 21\cos^5\theta(1-\cos^2\theta) + 35\cos^3\theta(1-\cos^2\theta)^2 - 7\cos\theta(1-\cos^2\theta)^3$$

$$=\cos^7\theta - 21\cos^5\theta(1-\cos^2\theta) + 35\cos^3\theta(1-2\cos^2\theta + \cos^4\theta) - 7\cos\theta(1-3\cos^2\theta+3\cos^4\theta-\cos^6\theta)$$

$$=\cos^7\theta - 21\cos^5\theta + 21\cos^7\theta + 35\cos^3\theta - 70\cos^5\theta + 35\cos^7\theta - 7\cos\theta + 21\cos^3\theta - 21\cos^5\theta + 7\cos^7\theta$$

அதாவது,

$$\cos 7\theta = 64\cos^7\theta - 112\cos^5\theta + 56\cos^3\theta - 7\cos\theta \quad \text{.......(v)}$$

$$\theta=\frac{2\pi}{7},\ \frac{4\pi}{7},\ \frac{6\pi}{7},\ \frac{8\pi}{7},\ \frac{10\pi}{7},\ \frac{12\pi}{7},\ \frac{14\pi}{7}=2\pi$$

எனில், $\cos 7\theta = 1$

$$\therefore\quad 64\cos^7\theta - 112\cos^5\theta + 56\cos^3\theta - 7\cos\theta = 1$$

அ-து, $64\cos^7\theta - 112\cos^5\theta + 56\cos^3\theta - 7\cos\theta - 1 = 0$

$\cos\theta = x$ எனக் குறித்தோமானால்,

$$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x - 1 = 0 \quad \text{.........(vi)}$$

$\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$, $\cos\frac{6\pi}{7}$, $\cos\frac{8\pi}{7}$, $\cos\frac{10\pi}{7}$, $\cos\frac{12\pi}{7}$,

$\cos 2\pi = 1$ என்பவை (vi)-ன் தீர்வுகள்

1 ஒரு தீர்வாகையால், சமன்பாடு (vi)-ன் இடக்கைப் பக்கமுள்ள கோவைக்கு $x - 1$ ஒரு காரணியாகும்.

எனவே, (vi) ஐ $x - 1$ ஆல் வகுக்க,

$$64x^6 + 64x^5 - 48x^4 - 48x^3 + 8x^2 + 8x + 1 = 0 \quad \text{.........(vii)}$$

$\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$, $\cos\frac{6\pi}{7}$, $\cos\frac{8\pi}{7}$, $\cos\frac{10\pi}{7}$, $\cos\frac{12\pi}{7}$

என்பவை (vii)-ன் தீர்வுகள்.

ஆனல், $\cos\frac{12\pi}{7} = \cos\frac{2\pi}{7}$

$$\cos\frac{10\pi}{7} = \cos\frac{4\pi}{7}$$

$$\cos\frac{8\pi}{7} = \cos\frac{6\pi}{7}$$

எனவே, $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$, $\cos\frac{6\pi}{7}$ என்பவை சமன்பாடு (vii)-ன் இரட்டைத் தீர்வுகள் (Double Roots) ஆகும். ஆகவே, (vii)-ன் இடக்கைப் பக்கமுள்ள கோவையை ஒரு வர்க்கமாக எழுத முடியும்.

அப்படி எழுத,

$$(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1)^2 = 0$$

$\therefore \quad \cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$, $\cos\frac{6\pi}{7}$ என்பவை

$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்.

**செய்முறை 3:**

$\theta = \frac{2\pi}{7}$, $\frac{4\pi}{7}$ அல்லது $\frac{6\pi}{7}$ எனில்,

$7\theta = 2\pi$, $4\pi$ அல்லது $6\pi$

அ-து, $7\theta = 2r\pi$, $r = 1, 2, 3$.

அ-து, $4\theta = 2r\pi - 3\theta$

$$\therefore \quad \cos 4\theta = \cos(2r\pi - 3\theta) = \cos 3\theta$$

$$\therefore \quad 2\cos^2 2\theta - 1 = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\therefore \quad 2[2\cos^2\theta - 1]^2 - 1 = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$\cos\theta = x$ எனக் குறித்தால்,

$$2[2x^2 - 1]^2 - 1 = 4x^3 - 3x$$

அ-து, $2\,[4x^4 - 4x^2 + 1] - 1 = 4x^3 - 3x$

அ-து, $8x^4 - 8x^2 + 2 - 1 - 4x^3 + 3x = 0$

அ-து, $8x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 3x + 1 = 0$

அ-து, $(x - 1)(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1) = 0$

$\therefore\ x - 1 = 0$ அல்லது $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$

$x - 1 = 0$ என்றால், $x = 1$

அ-து, $\cos\theta = 1$

$\therefore\ \theta = 0,\ 2\pi,\ 4\pi, \ldots\ldots\ldots$

ஆனால், $\theta = \dfrac{2\pi}{7}, \dfrac{4\pi}{7}$ அல்லது $\dfrac{6\pi}{7}$

எனவே $x - 1 \neq 0$

$$\therefore\ 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots \text{(viii)}$$

$x = \cos\dfrac{2\pi}{7}, \cos\dfrac{4\pi}{7}, \cos\dfrac{6\pi}{7}$ என்பவை (viii)-ன் தீர்வுகள்.

**செய்முறை 4:**

சூத்திரம் (96)-ன் படி,

$$\sin 7\theta = {}_7C_1 \cos^6\theta \,.\, \sin\theta - {}_7C_3 \cos^4\theta \,.\, \sin^3\theta + {}_7C_5 \cos^2\theta \,.\, \sin^5\theta - {}_7C_7 \sin^7\theta$$

$$\therefore\ \frac{\sin 7\theta}{\sin\theta} = 7\cos^6\theta - 35\cos^4\theta \,.\, \sin^2\theta + 21\cos^2\theta \,.\, \sin^4\theta - \sin^6\theta$$

$$= 7(1 - \sin^2\theta)^3 - 35\sin^2\theta\,(1 - \sin^2\theta)^2 + 21\sin^4\theta\,(1 - \sin^2\theta) - \sin^6\theta$$

$$= 7(1 - 3\sin^2\theta + 3\sin^4\theta - \sin^6\theta) - 35\sin^2\theta\,(1 - 2\sin^2\theta + \sin^4\theta) + 21\sin^4\theta\,(1 - \sin^2\theta) - \sin^6\theta$$

$$= 7 - 21\sin^2\theta + 21\sin^4\theta - 7\sin^6\theta - 35\sin^2\theta + 70\sin^4\theta - 35\sin^6\theta + 21\sin^4\theta - 21\sin^6\theta - \sin^6\theta$$

$$= 7 - 56\sin^2\theta + 112\sin^4\theta - 64\sin^6\theta$$

$$= 7 - 28\,(2\sin^2\theta) + 28\,(2\sin^2\theta)^2 - 8\,(2\sin^2\theta)^3$$

$$= 7 - 28\,(1 - \cos 2\theta) + 28\,(1 - \cos 2\theta)^2 - 8\,(1 - \cos 2\theta)^3$$

$$= 7 - 28\,(1 - \cos 2\theta) + 28\,(1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) - 8\,(1 - 3\cos 2\theta + 3\cos^2 2\theta - \cos^3 2\theta)$$

$$= 7 - 28 + 28 \cos 2\theta + 28 - 56 \cos 2\theta + 28 \cos^2 2\theta$$
$$- 8 + 24 \cos 2\theta - 24 \cos^2 2\theta + 8 \cos^3 2\theta$$

அதாவது,

$$\frac{\sin 7\theta}{\sin \theta} = 8 \cos^3 2\theta + 4 \cos^2 2\theta - 4 \cos 2\theta - 1$$

$\theta = \pm \frac{\pi}{7}, \pm \frac{2\pi}{7}, \pm \frac{3\pi}{7}$ எனில், $\sin 7\theta = 0$

$\therefore\ 8 \cos^3 2\theta + 4 \cos^2 2\theta - 4 \cos 2\theta - 1 = 0$

$\cos 2\theta = x$ எனக் குறித்தால்,

$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$ ..........................................(ix)

இப்பொழுது, $\cos\left(\pm \frac{2\pi}{7}\right), \cos\left(\pm \frac{4\pi}{7}\right), \cos\left(\pm \frac{6\pi}{7}\right)$

என்பவை (ix)-ன் தீர்வுகள்.

அதாவது, $\cos \frac{2\pi}{7}, \cos \frac{4\pi}{7}, \cos \frac{6\pi}{7}$ என்பவை (ix)-ன் தீர்வுகள்.

**மாதிரிக் கணக்கு 4-13. 9.**

**$2 \cos \frac{2\pi}{7}, 2 \cos \frac{4\pi}{7}, 2 \cos \frac{6\pi}{7}$ ஆகியவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டை அமைக்க.**

$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\cos \frac{2\pi}{7}, \cos \frac{4\pi}{7}, \cos \frac{6\pi}{7}$ என்பதை அறிவோம்.

இத்தீர்வுகளை 2 ஆல் பெருக்கினுல் நமக்குத் தேவையான சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் கிடைக்கும்.

எனவே, $8x^3 + 2 \,.\, 4x^2 - 2^2 \,.\, 4x - 2^3 \,.\, 1 = 0$

அ-து, $8x^3 + 8x^2 - 16x - 8 = 0$

அ-து, $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ என்பது நமக்குத் தேவையான சமன்பாடாகும்.

**மாதிரிக் கணக்கு 4-13. 10.**

**$\sec \frac{2\pi}{7}, \sec \frac{4\pi}{7}, \sec \frac{6\pi}{7}$ என்பவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டை அமைக்க.**

$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\cos \frac{2\pi}{7}, \cos \frac{4\pi}{7}, \cos \frac{6\pi}{7}$ என்பதை அறிவோம்.

இவைகளின் தலைகீழ் மதிப்புகள் ( Reciprocals ) நமக்குத் தேவையான சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் ஆகும்.

எனவே, $8.\frac{1}{x^3} + 4.\frac{1}{x^2} - 4.\frac{1}{x} - 1 = 0$

அ-து, $8 + 4x - 4x^2 - x^3 = 0$

அ-து, $x^3 + 4x^2 - 4x - 8 = 0$ என்பது நமக்குத் தேவையான சமன்பாடாகும்.

**மாதிரிக் கணக்கு 4-13. 11.**

$\sec^2\frac{2\pi}{7}$, $\sec^2\frac{4\pi}{7}$, $\sec^2\frac{6\pi}{7}$ **ஆகியவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டை அமைக்க. அதிலிருந்து,**

$$\tan^2\frac{2\pi}{7} + \tan^2\frac{4\pi}{7} + \tan^2\frac{6\pi}{7} = 21,$$

$$\sec^4\frac{2\pi}{7} + \sec^4\frac{4\pi}{7} + \sec^4\frac{6\pi}{7} = 416$$ **என நிறுவுக.**

$\sec\frac{2\pi}{7}$, $\sec\frac{4\pi}{7}$, $\sec\frac{6\pi}{7}$ என்பவை

$$x^3 + 4x^2 - 4x - 8 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என அறிவோம்.

அ-து, $x = \sec\frac{2\pi}{7}, \sec\frac{4\pi}{7}, \sec\frac{6\pi}{7}.$

$z = \sec^2\frac{2\pi}{7}, \sec^2\frac{4\pi}{7}, \sec^2\frac{6\pi}{7}$ என்பவை நமக்குத் தேவையான சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்.

$\therefore \quad z = x^2$

எனவே, தேவையான சமன்பாட்டைப் பெற (i)-ல் $x^2 = z$ என்ற பிரதியீடு (Substitution) செய்யவேண்டும்.

(i)-லிருந்து, $x^3 - 4x = 8 - 4x^2$

அ-து, $x(x^2 - 4) = 4(2 - x^2)$

$\therefore \quad x^2(x^2 - 4)^2 = 16(2 - x^2)^2$

இதில் $x^2 = z$ என இட,

$z(z - 4)^2 = 16(2 - z)^2$

அ-து, $z(z^2 - 8z + 16) = 16(4 - 4z + z^2)$

அ-து, $z^3 - 8z^2 + 16z - 64 + 64z - 16z^2 = 0$

அ-து, $z^3 - 24z^2 + 80z - 64 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$

(ii) தான் நமக்குத் தேவையான சமன்பாடாகும்.

$$\therefore \sec^2\frac{2\pi}{7}+\sec^2\frac{4\pi}{7}+\sec^2\frac{6\pi}{7}=-(-24)=24 \quad\ldots(iii)$$

$$\sec^2\frac{2\pi}{7}.\sec^2\frac{4\pi}{7}+\sec^2\frac{2\pi}{7}.\sec^2\frac{6\pi}{7}+\sec^2\frac{4\pi}{7}.\sec^2\frac{6\pi}{7}=80 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (iv)$$

(iii) லிருந்து,

$$1+\tan^2\frac{2\pi}{7}+1+\tan^2\frac{4\pi}{7}+1+\tan^2\frac{6\pi}{7}=24$$

$$\therefore \tan^2\frac{2\pi}{7}+\tan^2\frac{4\pi}{7}+\tan^2\frac{6\pi}{7}=21 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (v)$$

$$\sec^4\frac{2\pi}{7}+\sec^4\frac{4\pi}{7}+\sec^4\frac{6\pi}{7}$$

$$=\left(\sec^2\frac{2\pi}{7}+\sec^2\frac{4\pi}{7}+\sec^2\frac{6\pi}{7}\right)^2$$

$$-2\left(\sec^2\frac{2\pi}{7}.\sec^2\frac{4\pi}{7}+\sec^2\frac{2\pi}{7}.\sec^2\frac{6\pi}{7}+\sec^2\frac{4\pi}{7}.\sec^2\frac{6\pi}{7}\right)$$

$= 24^2 - 2 . 80$ [ (iii), (iv)-லிருந்து]

$= 576 - 160$

$= 416.$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-13.12.**

$\cot^2\frac{2\pi}{7}$, $\cot^2\frac{4\pi}{7}$, $\cot^2\frac{6\pi}{7}$ ஆகியவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டை அமைக்க. அதிலிருந்து, $\cot^2\frac{2\pi}{7}.\cot^2\frac{4\pi}{7}.\cot^2\frac{6\pi}{7}=\frac{1}{7}$ என நிறுவுக.

$\sec^2\frac{2\pi}{7}+\sec^2\frac{4\pi}{7}+\sec^2\frac{6\pi}{7}$ என்பவை

$$x^3-24x^2+80x-64=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என்பதை அறிவோம்.

அதாவது, $x = \sec^2 \frac{2\pi}{7},\ \sec^2 \frac{4\pi}{7},\ \sec^2 \frac{6\pi}{7}$.

$z = \cot^2 \frac{2\pi}{7},\ \cot^2 \frac{4\pi}{7},\ \cot^2 \frac{6\pi}{7}$ என்பவை

நமக்குத் தேவையான சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்.

இப்போது, $z = \cot^2 \frac{2\pi}{7}$

$$= \frac{1}{\tan^2 \frac{2\pi}{7}}$$

$$= \frac{1}{\sec^2 \frac{2\pi}{7} - 1}$$

$$= \frac{1}{x-1}$$

$\therefore \quad x - 1 = \frac{1}{z}$

அ - து. $x = 1 + \frac{1}{z} = \frac{1+z}{z}$

எனவே, தேவையான சமன்பாட்டைப் பெற (i)-ல் $x = \frac{1+z}{z}$ என்ற பிரதியீடு செய்ய வேண்டும். அந்தப் பிரதியீடு செய்ய,

$$\frac{(1+z)^3}{z^3} - 24\frac{(1+z)^2}{z^2} + 80\frac{(1+z)}{z} - 64 = 0$$

அ - து, $(1+z)^3 - 24z(1+z)^2 + 80z^2(1+z) - 64z^3 = 0$

அ - து, $1 + 3z + 3z^2 + z^3 - 24z(1 + 2z + z^2)$
$\quad + 80z^2(1+z) - 64z^3 = 0$

அ - து, $1 + 3z + 3z^2 + z^3 - 24z - 48z^2 - 24z^3$
$\quad + 80z^2 + 80z^3 - 64z^3 = 0$

அ - து, $-7z^3 + 35z^2 - 21z + 1 = 0$

அ - து, $7z^3 - 35z^2 + 21z - 1 = 0$ ............ **(ii)**

(ii) தான் நமக்குத் தேவையான சமன்பாடு ஆகும்.

$$\therefore \quad \cot^2 \frac{2\pi}{7} \cdot \cot^2 \frac{4\pi}{7} \cdot \cot^2 \frac{6\pi}{7} = -\frac{(-1)}{7} = \frac{1}{7}.$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-13.13.**

$\tan\frac{\pi}{9}$, $\tan\frac{2\pi}{9}$, $\tan\frac{3\pi}{9}$, $\tan\frac{4\pi}{9}$, $\tan\frac{5\pi}{9}$, $\tan\frac{6\pi}{9}$, $\tan\frac{7\pi}{9}$, $\tan\frac{8\pi}{9}$ ஆகியவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

சூத்திரம் (100)-ன் படி,

$$\tan 9\theta = \frac{{}_9C_1 \tan\theta - {}_9C_3 \tan^3\theta + {}_9C_5 \tan^5\theta - {}_9C_7 \tan^7\theta + {}_9C_9 \tan^9\theta}{1 - {}_9C_2 \tan^2\theta + {}_9C_4 \tan^4\theta - {}_9C_6 \tan^6\theta + {}_9C_8 \tan^8\theta}$$

$\theta = 0, \frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}, \frac{3\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}$

எனில், $\tan 9\theta = 0$

$$\therefore\ {}_9C_1 \tan\theta - {}_9C_3 \tan^3\theta + {}_9C_5 \tan^5\theta - {}_9C_7 \tan^7\theta + {}_9C_9 \tan^9\theta = 0$$

அ - து, $9\tan\theta - 84\tan^3\theta + 126\tan^5\theta - 36\tan^7\theta + \tan^9\theta = 0$

$\tan\theta = x$ என்று குறித்தால்,

$$x^9 - 36x^7 + 126x^5 - 84x^3 + 9x = 0$$

அ - து, $x(x^8 - 36x^6 + 126x^4 - 84x^2 + 9) = 0$ .............. (i)

சமன்பாடு (i)-ன் $x = \tan\theta = 0$ என்ற தீர்வு $\theta = 0$ என்பதற்கு ஒத்தது.

எனவே, $x = \tan\theta$, $\theta = \frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}, \frac{3\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}$ என்பவை

$x^8 - 36x^6 + 126x^4 - 84x^2 + 9 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் ஆகும்.

**மாதிரிக் கணக்கு 4-13.14.**

$\cot^2\frac{\pi}{7} + \cot^2\frac{2\pi}{7} + \cot^2\frac{3\pi}{7} = 5$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1948 செ.)
(செ. ப. 1955 செ.)

சூத்திரம் (100)-ன் படி,

$$\tan 7\theta = \frac{{}_7C_1 \tan\theta - {}_7C_3 \tan^3\theta + {}_7C_5 \tan^5\theta - {}_7C_7 \tan^7\theta}{1 - {}_7C_2 \tan^2\theta + {}_7C_4 \tan^4\theta - {}_7C_6 \tan^6\theta}$$

$\theta = 0, \frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}$ எனில்,

$\tan 7\theta = 0$

$\therefore \;\; {}_7C_1 \tan\theta - {}_7C_3 \tan^3\theta + {}_7C_5 \tan^5\theta - {}_7C_7 \tan^7\theta = 0$

அ-து, $7\tan\theta - 35\tan^3\theta + 21\tan^5\theta - \tan^7\theta = 0$

$\tan\theta = x$ எனில்,

$7x - 35x^3 + 21x^5 - x^7 = 0$

அ-து, $-x\,[x^6 - 21x^4 + 35x^2 - 7] = 0$ ........... (i)

சமன்பாடு (i)-ன் $x = \tan\theta = 0$ என்ற தீர்வு $\theta = 0$ என்பதற்கு ஒத்தது.

எனவே, $x = \tan\frac{\pi}{7}, \tan\frac{2\pi}{7}, \tan\frac{3\pi}{7}, \tan\frac{4\pi}{7}, \tan\frac{5\pi}{7}$, $\tan\frac{6\pi}{7}$ என்பவை $x^6 - 21x^4 + 35x^2 - 7 = 0$ ................. (ii) என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் ஆகும்.

ஆனல், $\tan\frac{6\pi}{7} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) = -\tan\frac{\pi}{7}$

$\tan\frac{5\pi}{7} = \tan\left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right) = -\tan\frac{2\pi}{7}$

$\tan\frac{4\pi}{7} = \tan\left(\pi - \frac{3\pi}{7}\right) = -\tan\frac{3\pi}{7}$

எனவே, $x = \pm\tan\frac{\pi}{7}, \pm\tan\frac{2\pi}{7}, \pm\tan\frac{3\pi}{7}$

என்பவை சமன்பாடு (ii)-ன் தீர்வுகள்.

$x^2 = z$ என்ற பிரதியீடு செய்தால், சமன்பாடு (ii), கீழ்க்கண்ட வாறு மாறுகிறது.

$z^3 - 21z^2 + 35z - 7 = 0$ ........... (iii)

$\tan^2\frac{\pi}{7}, \tan^2\frac{2\pi}{7}, \tan^2\frac{3\pi}{7}$ என்பவை சமன்பாடு (iii)-ன் தீர்வுகள் ஆகும்.

$\therefore \tan^2\frac{\pi}{7}.\tan^2\frac{2\pi}{7} + \tan^2\frac{\pi}{7}.\tan^2\frac{3\pi}{7} + \tan^2\frac{2\pi}{7}.\tan^2\frac{3\pi}{7}$

$= 35$ ..............(iv)

$\tan^2\frac{\pi}{7}.\tan^2\frac{2\pi}{7}.\tan^2\frac{3\pi}{7} = -(-7) = 7$ ............. (v)

(iv) ஐ (v) ஆல் வகுக்க,

$$\frac{1}{\tan^2 \frac{3\pi}{7}} + \frac{1}{\tan^2 \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\tan^2 \frac{\pi}{7}} = \frac{35}{7}$$

அ-து, $\cot^2 \frac{3\pi}{7} + \cot^2 \frac{2\pi}{7} + \cot^2 \frac{\pi}{7} = 5$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-13.15.**

**$\sin 5\theta = 1$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருத்திற் கொண்டு, $\sin \frac{\pi}{10}, \sin \frac{5\pi}{10}, \sin \frac{9\pi}{10}, \sin \frac{13\pi}{10}, \sin \frac{17\pi}{10}$ என்பவை $16x^5 - 20x^3 + 5x - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என நிறுவுக. இம்முடிவைப் பயன்படுத்தி,**

**$\sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{5\pi}{10} + \sin \frac{9\pi}{10} + \sin \frac{13\pi}{10} + \sin \frac{17\pi}{10} = 0$, $\sin 18° + \frac{1}{2} = \sin 54°$ என்று நிரூபிக்க.**

சூத்திரம் (96)-ன் படி,

$$\begin{aligned}\sin 5\theta &= {}_5C_1 \cos^4\theta \,.\, \sin\theta - {}_5C_3 \cos^2\theta \,.\, \sin^3\theta + {}_5C_5 \sin^5\theta \\ &= 5\cos^4\theta \,.\, \sin\theta - 10\cos^2\theta \,.\, \sin^3\theta + \sin^5\theta\end{aligned}$$

$= 5\sin\theta\,(1 - \sin^2\theta)^2 - 10\sin^3\theta\,(1 - \sin^2\theta) + \sin^5\theta$

$= 5\sin\theta\,[1 - 2\sin^2\theta + \sin^4\theta] - 10\sin^3\theta\,(1 - \sin^2\theta) + \sin^5\theta$

$= 5\sin\theta - 10\sin^3\theta + 5\sin^5\theta - 10\sin^3\theta + 10\sin^5\theta + \sin^5\theta$

$= 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$

$\theta = \frac{\pi}{10}, \frac{5\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}, \frac{13\pi}{10}, \frac{17\pi}{10}$ எனில், $\sin 5\theta = 1$

$\therefore 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta = 1$

அ-து, $16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta - 1 = 0$

$\sin\theta = x$ என இட்டால்,

$16x^5 - 20x^3 + 5x - 1 = 0$ ........................................ (i)

$\sin \frac{\pi}{10}, \sin \frac{5\pi}{10}, \sin \frac{9\pi}{10}, \sin \frac{13\pi}{10}, \sin \frac{17\pi}{10}$ என்பவை சமன்பாடு (i)-ன் தீர்வுகள்.

$\therefore \sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{5\pi}{10} + \sin \frac{9\pi}{10} + \sin \frac{13\pi}{10} + \sin \frac{17\pi}{10}$

$$= -\frac{0}{16} = 0$$

ஆனால், $\sin \frac{5\pi}{10} = \sin 18°$,

$$\sin \frac{5\pi}{10} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\sin \frac{9\pi}{10} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right) = \sin \frac{\pi}{10} = \sin 18°$$

$$\sin \frac{13\pi}{10} = \sin\left(\pi + \frac{3\pi}{10}\right) = -\sin \frac{3\pi}{10} = -\sin 54°$$

$$\sin \frac{17\pi}{10} = \sin\left(2\pi - \frac{3\pi}{10}\right) = -\sin \frac{3\pi}{10} = -\sin 54°$$

$$\therefore \sin 18° + 1 + \sin 18° - \sin 54° - \sin 54° = 0$$

அ-து, $2 \sin 18° + 1 = 2 \sin 54°$

$$\therefore \sin 18° + \frac{1}{2} = \sin 54°$$

## பயிற்சி 4 (இ)

1. கீழ்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(a) $\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$
$= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$

(b) $\cos 7\theta = \cos^7\theta - 21\cos^5\theta \,.\, \sin^2\theta + 35\cos^3\theta \,.\, \sin^4\theta - 7\cos\theta \,.\, \sin^6\theta$
$= 64\cos^7\theta - 112\cos^5\theta + 56\cos^3\theta - 7\cos\theta$
(ம. ப. 1969 செ.)

(c) $\cos 9\theta = \cos^9\theta - 36\cos^7\theta\sin^2\theta + 126\cos^5\theta\sin^4\theta - 84\cos^3\theta\sin^6\theta + 9\cos\theta\sin^8\theta$
$= 256\cos^9\theta - 576\cos^7\theta + 432\cos^5\theta - 120\cos^3\theta + 9\cos\theta$
(ம. ப. 1970 செ.)

(d) $\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$
$= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$
$= 8\sin^4\theta - 8\sin^2\theta + 1$

(e) $\cos 8\theta = \cos^8\theta - 28\cos^6\theta\sin^2\theta + 70\cos^4\theta\sin^4\theta - 28\cos^2\theta\sin^6\theta + \sin^8\theta$
$= 128\cos^8\theta - 256\cos^6\theta + 160\cos^4\theta - 32\cos^2\theta + 1$ (செ. ப. 1948 மா.)
$= 128\sin^8\theta - 256\sin^6\theta + 160\sin^4\theta - 32\sin^2\theta + 1$ (செ. ப. 1953 செ.)

2. கீழ்வருவனவற்றை நிறுவுக:

(a) $\frac{\sin 7\theta}{\sin\theta} = 7\cos^6\theta - 35\cos^4\theta\sin^2\theta + 21\cos^2\theta\sin^4\theta - \sin^6\theta$

$= 7 - 56\sin^2\theta + 112\sin^4\theta - 64\sin^6\theta$

(b) $\frac{\sin 9\theta}{\sin\theta} = 9\cos^8\theta - 84\cos^6\theta\sin^2\theta + 126\cos^4\theta.\sin^4\theta - 36\cos^2\theta.\sin^6\theta + \sin^8\theta$

$= 256\sin^8\theta - 576\sin^6\theta + 432\sin^4\theta - 120\sin^2\theta + 9$

(c) $\frac{\sin 6\theta}{\sin\theta} = 6\cos^5\theta - 20\cos^3\theta\sin^2\theta + 6\cos\theta\sin^4\theta$

(d) $\frac{\sin 8\theta}{\sin\theta} = 8\cos^7\theta - 56\cos^5\theta\sin^2\theta + 56\cos^3\theta\sin^4\theta - 8\cos\theta\sin^6\theta$

(e) $\frac{\sin 6\theta}{\sin\theta} = 32\cos^5\theta - 32\cos^3\theta + 6\cos\theta$

(செ. ப. 1962 ஏ.; 1965 செ.; 1967 ஏ.; 1967 செ.)

(f) $\frac{\sin 8\theta}{\sin\theta} = 8[16\cos^7\theta - 24\cos^5\theta + 10\cos^3\theta - \cos\theta]$

3. $\cos 6\theta$ ஐ $\cos\theta$-ன் அடுக்குகளின் மூலம் விரித்தெழுதுக.

(செ. ப. 1967 ஏ; 1969 ஏ.)

4. $\sin 7x$ ஐ $\sin x$-ன் அடுக்குகளின் மூலம் விரித்தெழுதுக.

(செ. ப. 1968 ஏ.)

5. $\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ ஐ $\cos\theta$-ன் அடுக்குகளின் மூலம் விரித்தெழுதுக.

(செ. ப. 1971 ஏ.)

6. கீழ்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(a) $\tan 5\theta = \frac{5\tan\theta - 10\tan^3\theta + \tan^5\theta}{1 - 10\tan^2\theta + 5\tan^4\theta}$

(செ. ப. 1963 ஏ.)

(b) $\tan 8\theta = \frac{8\tan\theta - 56\tan^3\theta + 56\tan^5\theta - 8\tan^7\theta}{1 - 28\tan^2\theta + 70\tan^4\theta - 28\tan^6\theta + \tan^8\theta}$

7. $\tan n\theta = \frac{nC_1\tan\theta - nC_3\tan^3\theta + nC_5\tan^5\theta - \ldots\ldots}{1 - nC_2\tan^2\theta + nC_4\tan^4\theta - \ldots\ldots}$

என நிறுவுக. (செ. ப. 1948 செ.; 1961 செ.; 1968 செ.; 1969 செ.)

8. வழக்கமான குறியீட்டில்,

$$\tan(\theta_1 + \theta_2 + \ldots\ldots + \theta_n) = \frac{S_1 - S_3 + S_5 - \ldots\ldots\ldots\ldots}{1 - S_2 + S_4 - \ldots\ldots\ldots\ldots}$$

என நிறுவுக. (செ. ப. 1963 ஏ.; 1967 செ.; 1968 செ.)
(ம. ப. 1970 செ.)

9. $x = 2 \cos 2\theta$ எனில், $\dfrac{\cos 7\theta}{\cos \theta} = 1 - 2x - x^2 + x^3$ என நிறுவுக.

10. $x = 2\cos\theta$ எனில், $\dfrac{\sin 9\theta}{\sin\theta} = (x^2 - 1)(x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 1)$ என் நிறுவுக.

11. $1 + \cos 10\theta = 2(16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta)^2$
$1 - \cos 10\theta = 2(16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta)^2$ என்று நிரூபிக்க.

12. $x_1, x_2, x_3, x_4$ என்பவை
$x^4 - x^3\sin 2\alpha + x^2\cos 2\alpha - x\cos\alpha - \sin\alpha = 0$, என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் எனில்,

$$\tan^{-1} x_1 + \tan^{-1} x_2 + \tan^{-1} x_3 + \tan^{-1} x_4 = n\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha$$

என நிறுவுக.

13. $\tan\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = 3\tan 3\theta$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு, 0-க்கும் $\pi$-க்கும் இடையே நான்கு தீர்வுகள் உண்டு என்று நிரூபிக்க. அவைகள் $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ எனில்,

$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma + \tan\delta = 0$ என நிறுவுக.

14. $\dfrac{ah}{\cos\theta} - \dfrac{bk}{\sin\theta} = a^2 - b^2$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு நான்கு தீர்வுகள் உண்டு என நிறுவுக. அவைகள் $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ எனில், $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = (2r+1)\pi$ ஆரையன்கள் என்று நிரூபிக்க.

15. $a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta + 2ga\cos\theta + 2fb\sin\theta + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு 4 தீர்வுகள் உண்டு என்று நிரூபிக்க. அவைகள் $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ எனில், $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 2n\pi$ ஆரையன்கள் என நிறுவுக.

16. $\sin(\theta + \alpha) = a\sin 2\theta + b$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு 4 தீர்வுகள் உண்டு என்று நிரூபிக்க. அவைகள் $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ எனில், $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = (2n+1)\pi$ ஆரையன்கள் என நிறுவுக.

17. $\cos 2\theta + a\cos\theta + b\sin\theta + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு 0-க்கும் $2\pi$-க்கும் இடையே பொதுவாக 4 தீர்வுகள் உண்டு என நிறுவுக. அவைகள் $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$, $\theta_4$ எனில், $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 2K\pi$ ஆரையன்கள் என்று நிரூபிக்க.

18. $\sin 3\theta = a\sin\theta + c$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு 6 தீர்வுகள் உண்டு என நிறுவுக. அவைகள் $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$, $\theta_4$, $\theta_5$, $\theta_6$ எனில், $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 = (2K+1)\pi$ ஆரையன்கள் என்று நிரூபிக்க.

19. $\theta$-ன் மதிப்பு எதுவாக இருந்தாலும், $\dfrac{\tan\theta}{\tan 3\theta}$ -ன் மதிப்பு ஒருபோதும் $\frac{1}{3}$ க்கும் 3 க்கும் இடையே இராது என நிறுவுக.

20. $\cos\dfrac{2\pi}{9}$, $\cos\dfrac{4\pi}{9}$, $\cos\dfrac{8\pi}{9}$ என்பவை $8x^3 - 6x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என நிறுவுக.

(செ. ப. 1964 செ.)

21. $\cos\dfrac{\pi}{7}$, $\cos\dfrac{3\pi}{7}$, $\cos\dfrac{5\pi}{7}$ என்பவை $8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என நிறுவுக.

(செ. ப. 1957 மா.)

22. $8\left(x - \cos\dfrac{\pi}{7}\right)\left(x - \cos\dfrac{3\pi}{7}\right)\left(x - \cos\dfrac{5\pi}{7}\right)$

$= 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1953 செ.)

23. $\cos\dfrac{\pi}{8}$, $\cos\dfrac{3\pi}{8}$, $\cos\dfrac{5\pi}{8}$, $\cos\dfrac{7\pi}{8}$ என்பவை $8x^4 - 8x^2 + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என நிறுவுக.

24. $\cos\dfrac{\pi}{10}$, $\cos\dfrac{3\pi}{10}$, $\cos\dfrac{7\pi}{10}$, $\cos\dfrac{9\pi}{10}$ ஆகியவை $16x^4 - 4x^2 - 16x + 5 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என்று நிரூபிக்க.

25. $\cos\dfrac{2\pi}{9}$, $\cos\dfrac{4\pi}{9}$, $\cos\dfrac{6\pi}{9}$, $\cos\dfrac{8\pi}{9}$ என்பவை $16x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 4x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என நிறுவுக.

26. $\cos\frac{\pi}{9}, \cos\frac{3\pi}{9}, \cos\frac{5\pi}{9}, \cos\frac{7\pi}{9}$ என்பவை $16x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 4x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என நிறுவுக. இம் முடிவைப் பயன்படுத்தி,

(a) $\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} = 0$

(b) $8\cos\frac{\pi}{9} . \cos\frac{5\pi}{9} . \cos\frac{7\pi}{9} = 1$

$= 8\cos\frac{\pi}{9} . \cos\frac{2\pi}{9} . \cos\frac{4\pi}{9}$

(c) $\cos^2\frac{\pi}{9} + \cos^2\frac{2\pi}{9} + \cos^2\frac{4\pi}{9} = \frac{3}{2}$

(d) $\cos^4\frac{\pi}{9} + \cos^4\frac{2\pi}{9} + \cos^4\frac{4\pi}{9} = \frac{9}{8}$ என்று நிறுவுக.

27. $\cos 4\theta = \frac{1}{2}$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருத்திற் கொண்டு, $\cos\frac{\pi}{12}, \cos\frac{5\pi}{12}, \cos\frac{7\pi}{12}, \cos\frac{11\pi}{12}$ என்பவை $16x^4 - 16x^2 + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என நிறுவுக. இதன் மூலம், $\cos^2\frac{\pi}{12}, \cos^2\frac{5\pi}{12}$ என்ற இரண்டும் $16z^2 - 16z + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என்று நிரூபிக்க.

28. $\cos^2\frac{\pi}{7}, \cos^2\frac{2\pi}{7}, \cos^2\frac{3\pi}{7}$ என்பவை, $64x^3 - 80x^2 + 24x - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என நிறுவுக.

(செ. ப. 1947 செ.; 1954 மா.)

இதைப் பயன்படுத்தி,

(i) $\cos^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{2\pi}{7} + \cos^2\frac{3\pi}{7} = \frac{5}{4}$

(ii) $\cos^4\frac{\pi}{7} + \cos^4\frac{2\pi}{7} + \cos^4\frac{3}{7} = \frac{13}{16}$ என நிறுவுக.

29. $\sec^2\frac{\pi}{9}, \sec^2\frac{5\pi}{9}, \sec^2\frac{7\pi}{9}$ என்பவை $x^3 - 36x^2 + 96x - 64 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என நிறுவுக.

(செ. ப. 1956 மா.)

30. $\sec^2 \frac{\pi}{7}$, $\sec^2 \frac{2\pi}{7}$, $\sec^2 \frac{3\pi}{7}$ என்பவை $x^3 - 24x^2 + 80x - 64 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என நிறுவுக. இதன் மூலம்,

$$\text{(i)} \ \sec^2 \frac{\pi}{7} + \sec^2 \frac{2\pi}{7} + \sec^2 \frac{3\pi}{7} = 24$$

$$\text{(ii)} \ \sec^4 \frac{\pi}{7} + \sec^4 \frac{2\pi}{7} + \sec^4 \frac{3\pi}{7} = 416$$ என

நிறுவுக.

31. $\frac{1 + \cos 7\theta}{1 + \cos \theta} = [8 \cos^3 \theta - 4 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta + 1]^2$ என நிறுவுக. இதன் மூலம் $\cos \frac{\pi}{7}$, $\cos \frac{3\pi}{7}$, $\cos \frac{5\pi}{7}$ என்பவை $8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என்று நிரூபிக்க.

32. $x = 2 \cos \theta$ எனில், $\frac{\sin 7\theta}{\sin \theta} = x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1$ என நிறுவுக. இதன் மூலம் $\pm 2 \cos \frac{\pi}{7}$, $\pm 2 \cos \frac{2\pi}{7}$, $\pm 2 \cos \frac{3\pi}{7}$ என்பவை $x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என்று நிரூபிக்க.

33. $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1$

$$= \left(x - 2 \cos \frac{2\pi}{5}\right) \left(x - 2 \cos \frac{4\pi}{5}\right) \left(x - 2 \cos \frac{6\pi}{5}\right)$$

$\left(x - 2 \cos \frac{8\pi}{5}\right)$ என்று நிரூபிக்க.

34. $\sin^2 \frac{\pi}{7}$, $\sin^2 \frac{2\pi}{7}$, $\sin^2 \frac{3\pi}{7}$ ஆகியவை $64x^3 - 112x^2 + 56x - 7 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என நிறுவுக.

(செ. ப. 1955)

இதைப் பயன்படுத்தி,

$$\text{(i)} \ \sin^2 \frac{\pi}{7} + \sin^2 \frac{2\pi}{7} + \sin^2 \frac{3\pi}{7} = \frac{7}{4}$$

$$\text{(ii)} \ \sin^4 \frac{\pi}{7} + \sin^4 \frac{2\pi}{7} + \sin^4 \frac{3\pi}{7} = \frac{21}{16}$$ என நிறுவுக.

35. $\tan\frac{\pi}{5}, \tan\frac{2\pi}{5}, \tan\frac{3\pi}{5}, \tan\frac{4\pi}{5}$ என்பவை $x^4 - 10x^2 + 5 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என நிறுவுக. (செ. ப. 1948 செ.)

இதன் மூலம், $\tan^2\frac{\pi}{5} + \tan^2\frac{2\pi}{5} + \tan^2\frac{3\pi}{5} + \tan^2\frac{4\pi}{5} = 20$ என நிறுவுக,

36. $\tan\frac{\pi}{16}, \tan\frac{5\pi}{16}, \tan\frac{9\pi}{16}, \tan\frac{13\pi}{16}$ என்பவை $x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என நிறுவுக.

37. $\tan^2\frac{\pi}{9}, \tan^2\frac{2\pi}{9}, \tan^2\frac{3\pi}{9}, \tan^2\frac{4\pi}{9}$ என்பவை $x^4 - 36x^3 + 126x^2 - 84x + 9 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என நிறுவுக. இதன் மூலம்,

$$\tan^4\frac{\pi}{9} + \tan^4\frac{2\pi}{9} + \tan^4\frac{3\pi}{9} + \tan^4\frac{4\pi}{9} = 1044$$ என நிறுவுக.

**பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.**

38. $\sin\frac{\pi}{5} \cdot \sin\frac{2\pi}{5} \cdot \sin\frac{3\pi}{5} \cdot \sin\frac{4\pi}{5} = \frac{5}{16}$

39. $\cos\frac{\pi}{15} + \cos\frac{7\pi}{15} + \cos\frac{11\pi}{15} + \cos\frac{13\pi}{15} = -\frac{1}{2}$ (ம. ப. 1969 ஏ.)

40. $\cos\frac{\pi}{9} \cdot \cos\frac{2\pi}{9} \cdot \cos\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}$ (ம. ப. 1970 செ.)

41. $\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$

42. $\cos\frac{2\pi}{9} \cdot \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} \cdot \cos\frac{8\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9} \cdot \cos\frac{2\pi}{9} = -\frac{3}{4}$ (செ. ப. 1946 மா.)

43. $\tan \frac{2\pi}{7} . \tan \frac{4\pi}{7} . \tan \frac{6\pi}{7} = \sqrt{7}$ (செ. ப. 1946 செ.)

44. $\tan \frac{\pi}{11} . \tan \frac{2\pi}{11} . \tan \frac{3\pi}{11} . \tan \frac{4\pi}{11} . \tan \frac{5\pi}{11} = \sqrt{11}$

(செ. ப. 1952; 1955)

### விடைகள்

3. $32 \cos^6 \theta - 48 \cos^4 \theta + 18 \cos^2 \theta - 1.$

4. $7 \sin \theta - 56 \sin^3 \theta + 112 \sin^5 \theta - 64 \sin^7 \theta.$

$\cos^n \theta$, $\sin^n \theta$ ஆகியவற்றின் விரித்தல்கள்

**4·14.1.** $\cos^n \theta$-ன் விரித்தல் (Expansion of $\cos^n \theta$)

$x = \cos \theta + i \sin \theta$ எனில்,

$$\frac{1}{x} = \cos \theta - i \sin \theta.$$

$$\therefore \quad x + \frac{1}{x} = 2 \cos \theta \qquad \text{.........(i)}$$

$r$ ஒரு முழு எண் எனில், டிமாவியரின் தேற்றப்படி,

$$x^r = \cos r\theta + i \sin r\theta$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x^r} = \cos r\theta - i \sin r\theta$$

$$\therefore \quad x^r + \frac{1}{x^r} = 2 \cos r\theta \qquad \text{.........(ii)}$$

(i)-லிருந்து,

$$(2 \cos \theta)^n = \left(x + \frac{1}{x}\right)^n$$

$n$ ஒரு நேர் முழு எண் எனில், ஈருறுப்புத் தேற்றப்படி,

$$(2 \cos \theta)^n = x^n + nC_1\, x^{n-1} . \frac{1}{x} + nC_2\, x^{n-2} . \frac{1}{x^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ nC_{n-2}\, x^2 . \frac{1}{x^{n-2}} + nC_{n-1}\, x . \frac{1}{x^{n-1}} + nC_n \frac{1}{x^n}$$

$$= x^n + nC_1\, x^{n-2} + nC_2\, x^{n-4} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ nC_2 \frac{1}{x^{n-4}} + nC_1 \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \qquad [\because nC_{n-r} = nC_r]$$

வலக்கைப் பக்கம் உள்ள தொடரில், உறுப்புகளைத் தொடக்கத்திலிருந்தும், இறுதியிலிருந்தும் வரிசைப்படி இரட்டை இரட்டையாக ஒன்று சேர்க்க,

$$(2\cos\theta)^n = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + nC_1\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right)$$
$$+ nC_2\left(x^{n-4} + \frac{1}{x^{n-4}}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

அதாவது;

$$2^n \cos^n\theta = 2\cos n\theta + nC_1\, 2\cos(n-2)\theta$$
$$+ nC_2\, 2\cos(n-4)\theta + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(ii)-லிருந்து}$$

$$\therefore\quad 2^{n-1}\cos^n\theta = \cos n\theta + nC_1\cos(n-2)\theta$$
$$+ nC_2\cos(n-4)\theta + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (105)$$

இதில் இறுதி உறுப்பு $n$-ன் மதிப்பைப் பொறுத்தது.

**வகை 1:**

$n$ ஓர் ஒற்றை எண். அதாவது $(n+1)$ ஓர் இரட்டை எண்.

$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^n$-ன் விரித்தலில் இரண்டு நடு உறுப்புகள் (Middle Terms) உண்டு. அவைகள் $\frac{n+1}{2}$ ஆம், $\frac{n+3}{2}$ ஆம் உறுப்புகள் ஆகும். அந்த உறுப்புகள் முறையே $nC_{\frac{n-1}{2}}\, x$, $nC_{\frac{n+1}{2}}\, \frac{1}{x} = nC_{\frac{n-1}{2}}\, \frac{1}{x}$ ஆகும்.

$$\text{அவைகளின் கூட்டுத்தொகை} = nC_{\frac{n-1}{2}}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$
$$= nC_{\frac{n-1}{2}}\; 2\cos\theta$$

$$\therefore\quad 2^{n-1}\cos^n\theta = \cos n\theta + nC_1\cos(n-2)\theta$$
$$+ nC_2\cos(n-4)\theta + \ldots\ldots\ldots + nC_{\frac{n-1}{2}}\cos\theta \qquad (106)$$

**வகை 2:**

$n$ ஓர் இரட்டை எண். அதாவது $(n+1)$ ஓர் ஒற்றை எண்.

$\therefore \quad \left(x+\frac{1}{x}\right)^n$-ன் விரித்தலில் ஒரே ஒரு நடு உறுப்புதான் உண்டு. அது $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ஆம் உறுப்பாகும். அந்த உறுப்பு $nC_{\frac{n}{2}}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad 2^{n-1}\cos^n\theta = \cos n\theta + nC_1\cos(n-2)\theta + nC_2\cos(n-4)\theta + \dots\dots + \frac{1}{2}\,nC_{\frac{n}{2}} \quad (107)$$

**4-14.2.** $\sin^n\theta$ -ன் விரித்தல் (Expansion of $\sin^n\theta$)

$x = \cos\theta + i\sin\theta$ எனில்,

$$\frac{1}{x} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\therefore \quad x+\frac{1}{x} = 2\cos\theta \quad \dots\dots\dots\dots \text{(i)}$$

$$x-\frac{1}{x} = 2\,i\sin\theta \quad \dots\dots\dots\dots \text{(ii)}$$

$r$ ஒரு முழு எண் எனில், டிமாவியரின் தேற்றப்படி,

$$x^r = \cos r\theta + i\sin r\theta$$

$$\frac{1}{x^r} = \cos r\theta - i\sin r\theta$$

$$\therefore \quad x^r+\frac{1}{x^r} = 2\cos r\theta \quad \dots\dots\dots\dots \text{(iii)}$$

$$x^r-\frac{1}{x^r} = 2\,i\sin r\theta \quad \dots\dots\dots\dots \text{(iv)}$$

(ii)-லிருந்து, $(2\,i\sin\theta)^n = \left(x-\frac{1}{x}\right)^n$

$n$ ஒரு நேர் முழு எண் எனில், ஈருறுப்புத் தேற்றப்படி,

$$2^n i^n \sin^n\theta = x^n - nC_1\,x^{n-1}\cdot\frac{1}{x} + nC_2\,x^{n-2}\cdot\frac{1}{x^2} - \dots\dots + (-1)^{n-2}\,nC_{n-2}\,x^2\cdot\frac{1}{x^{n-2}} + (-1)^{n-1}\,nC_{n-1}\,x\cdot\frac{1}{x^{n-1}} + (-1)^n\,\frac{1}{x^n}$$

**வகை 1 :**

$n$ ஓர் ஒற்றை எண். அதாவது $(n+1)$ ஓர் இரட்டை எண்.

$$\therefore \quad (-1)^n \frac{1}{x^n} = -\frac{1}{x^n}$$

$$i^n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} i \qquad \text{[சூத்திரம் (94)-ன் படி]}$$

$\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^n$-ன் விரித்தலில் இரண்டு நடு உறுப்புகள் உண்டு. அவைகள் $\dfrac{n+1}{2}$ ஆம், $\dfrac{n+3}{2}$ ஆம் உறுப்புகளாகும். அந்த உறுப்புகள் முறையே $(-1)^{\frac{n-1}{2}} . nC_{\frac{n-1}{2}} . x, \ (-1)^{\frac{n+1}{2}} nC_{\frac{n+1}{2}} . \dfrac{1}{x}$

$$= (-1)^{\frac{n+1}{2}} . nC_{\frac{n-1}{2}} . \frac{1}{x} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, முடிவு (V) கீழ்க்கண்டவாறு மாறுகிறது :

$$\therefore \quad 2^n(-1)^{\frac{n-1}{2}} i \sin^n \theta$$

$$= x^n - nC_1 x^{n-2} + nC_2 x^{n-4} - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{\frac{n-1}{2}} nC_{\frac{n-1}{2}} . x + (-1)^{\frac{n+1}{2}} nC_{\frac{n-1}{2}} . \frac{1}{x} + \ldots\ldots\ldots$$

$$- nC_2 \frac{1}{x^{n-4}} + nC_1 \frac{1}{x^{n-2}} - \frac{1}{x^n} \quad [\because \ nC_{n-r} = nC_r]$$

வலக்கைப் பக்கம் உள்ள தொடரில், உறுப்புகளைத் தொடக்கத்திலிருந்தும் இறுதியிலிருந்தும் வரிசைப்படி இரட்டை இரட்டையாக ஒன்று சேர்க்க,

$$2^n (-1)^{\frac{n-1}{2}} i \sin^n \theta$$

$$= \left(x^n - \frac{1}{x^n}\right) - nC_1 \left(x^{n-2} - \frac{1}{x^{n-2}}\right)$$

$$+ nC_2 \left(x^{n-4} - \frac{1}{x^{n-4}}\right)$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} nC_{\frac{n-1}{2}} \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= 2i \sin n\theta - nC_1\, 2i \sin (n-2)\theta + nC_2\, 2i \sin (n-4)\theta$$

$$- \ldots\ldots\ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, nC_{\frac{n-1}{2}}\, 2i \sin \theta$$

[ (iv)-லிருந்து ]

$$\therefore \quad 2^{n-1} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin^n \theta$$

$$= \sin n\theta - nC_1 \sin (n-2)\theta + nC_2 \sin (n-4)\theta$$

$$- \ldots\ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, nC_{\frac{n-1}{2}} \sin \theta \qquad (108)$$

**வகை 2 :**

$n$ ஓர் இரட்டை எண். அதாவது $(n+1)$ ஓர் ஒற்றை எண்.

$$\therefore \quad (-1)^n \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x^n}$$

$$i^n = (-1)^{\frac{n}{2}} \qquad \text{[சூத்திரம் (93)-ன் படி]}$$

$\left(x - \frac{1}{x}\right)^n$-ன் விரித்தலில் ஒரே ஒரு நடு உறுப்பு தான் உண்டு. அது $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ ஆம் உறுப்பாகும். அந்த உறுப்பு $(-1)^{\frac{n}{2}} nC_{\frac{n}{2}}$ ஆகும்.

எனவே, முடிவு (v) கீழ்க்கண்டவாறு ஆகிறது.

$$2^n (-1)^{\frac{n}{2}} \sin^n \theta$$

$$= x^n - nC_1\, x^{n-2} + nC_2\, x^{n-4} - \ldots\ldots + (-1)^{\frac{n}{2}}\, nC_{\frac{n}{2}}$$

$$+ \ldots\ldots + nC_2 \frac{1}{x^{n-4}} - nC_1 \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \quad [\because nC_{n-r} = nC_r]$$

வலக்கைப் பக்கம் உள்ள தொடரில், உறுப்புகளைத் தொடக்கத்திலிருந்தும் இறுதியிலிருந்தும் வரிசைப்படி இரட்டை இரட்டையாக ஒன்று சேர்க்க,

$$2^n (-1)^{\frac{n}{2}} \sin^n \theta$$

$$= \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) - nC_1 \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) + nC_2 \left(x^{n-4} + \frac{1}{x^{n-4}}\right)$$

$$- \ldots\ldots\ldots + (-1)^{\frac{n}{2}}\, nC_{\frac{n}{2}}$$

$$= \ 2\cos n\theta - nC_1\, 2\cos(n-2)\theta + nC_2\, 2\cos(n-4)\theta$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{\frac{n}{2}}\, {}_nC_{\frac{n}{2}} \qquad [\text{(iii)-லிருந்து}]$$

$$\therefore \ 2^{n-1}(-1)^{\frac{n}{2}} \sin^n\theta$$

$$= \cos n\theta - nC_1 \cos(n-2)\theta + nC_2\cos(n-4)\theta$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{2}\, nC_{\frac{n}{2}} \qquad (109)$$

## மாதிரிக் கணக்குகள்

**மாதிரிக் கணக்கு 4-15.1.**

$64\ \cos^7\theta = \cos 7\theta + 7\cos 5\theta + 21\cos 3\theta + 35\cos\theta$ **என நிறுவுக.**

(செ. ப. 1947 செ.)
(செ. ப. 1960 செ.)
(செ. ப. 1963 ஏ.)
(ம. ப. 1969 ஏ.)

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^7 = x^7 + 7x^5 + 21x^3 + 35x + \frac{35}{x} + \frac{21}{x^3} + \frac{7}{x^5} + \frac{1}{x^7}$$

$$= \left(x^7+\frac{1}{x^7}\right) + 7\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right) + 21\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right) + 35\left(x+\frac{1}{x}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

$x = \cos\theta + i\sin\theta$ எனில்,

$$x^r + \frac{1}{x^r} = 2\cos r\theta, \quad r = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

இம்மதிப்புகளை (i)-ல் இட,

$$2^7\cos^7\theta = 2\cos 7\theta + 7(2\cos 5\theta) + 21(2\cos 3\theta) + 35(2\cos\theta)$$

$$\therefore \ 2^6\cos^7\theta = \cos 7\theta + 7\cos 5\theta + 21\cos 3\theta + 35\cos\theta$$

அ-து, $64\cos^7\theta = \cos 7\theta + 7\cos 5\theta + 21\cos 3\theta + 35\cos\theta$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-15.2.**

$\cos^{10}\theta$ ஐ $\theta$-ன் மடங்குகளுடைய கொசைன்கள் (cosines of multiples of $\theta$) மூலம் விரித்தெழுதுக.

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10} = x^{10}+10x^8+45x^6+120x^4+210x^2+252$$
$$+\frac{210}{x^2}+\frac{120}{x^4}+\frac{45}{x^6}+\frac{10}{x^8}+\frac{1}{x^{10}}$$
$$=\left(x^{10}+\frac{1}{x^{10}}\right)+10\left(x^8+\frac{1}{x^8}\right)+45\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)$$
$$+120\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+210\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+252 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

$x=\cos\theta+i\sin\theta$ எனில்,

$$x^r+\frac{1}{x^r}=2\cos r\theta, \quad r=1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

இம்மதிப்புகளை (i)-ல் இட,

$$2^{10}\cos^{10}\theta = 2\cos 10\theta+10(2\cos 8\theta)+45(2\cos 6\theta)$$
$$+120(2\cos 4\theta)+210(2\cos 2\theta)+252$$
$$\therefore \quad \cos^{10}\theta=\frac{1}{2^9}[\cos 10\theta+10\cos 8\theta+45\cos 6\theta$$
$$+120\cos 4\theta+210\cos 2\theta+126]$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-15. 3.**

$128\sin^8\theta=\cos 8\theta-8\cos 6\theta+28\cos 4\theta-56\cos 2\theta+35$ என நிறுவுக. (செ. ப. 1961 செ.)

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^8=x^8-8x^6+28x^4-56x^2+70-\frac{56}{x^2}$$
$$+\frac{28}{x^4}-\frac{8}{x^6}+\frac{1}{x^8}$$
$$=\left(x^8+\frac{1}{x^8}\right)-8\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)+28\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)$$
$$-56\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+70 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

$x=\cos\theta+i\sin\theta$ எனில்,

$$x-\frac{1}{x}=2i\sin\theta,$$
$$x^r+\frac{1}{x^r}=2\cos r\theta, \; r=1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

இம்மதிப்புகளை (i)-ல் இட,

$$2^8 i^8\sin^8\theta=2\cos 8\theta-8(2\cos 6\theta)+28(2\cos 4\theta)$$
$$-56(2\cos 2\theta)+70$$

அ-து, $128\sin^8\theta=\cos 8\theta-8\cos 6\theta+28\cos 4\theta$
$$-56\cos 2\theta+35$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-15.4.**

$2^6 \sin^7 \theta + \sin 7\theta - 7 \sin 5\theta + 21 \sin 3\theta - 35 \sin\theta = 0$
என நிறுவுக.

(செ. ப. 1966 செ.)
(ம. ப. 1969 ஏ.)
(ம. ப. 1970 ஏ.)
(ம. ப. 1971 செ.)

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^7 = x^7 - 7x^5 + 21x^3 - 35x + \frac{35}{x} - \frac{21}{x^3} + \frac{7}{x^5} - \frac{1}{x^7}$$

$$= \left(x^7 - \frac{1}{x^7}\right) - 7\left(x^5 - \frac{1}{x^5}\right) + 21\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)$$

$$- 35\left(x - \frac{1}{x}\right) \qquad \text{........... (i)}$$

$x = \cos\theta + i \sin\theta$ எனில்,

$x^r - \dfrac{1}{x^r} = 2 i \sin r\theta,\ r = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\ldots$

இம் மதிப்புகளை (i)-ல் இட,

$2^7 i^7 \sin^7\theta = 2 i \sin 7\theta - 7(2 i \sin 5\theta) + 21 (2 i \sin 3\theta)$
$- 35 (2 i \sin\theta)$

அ-து, $2^6 i^6 \sin^7\theta = \sin 7\theta - 7 \sin 5\theta + 21 \sin 3\theta - 35 \sin\theta$

அ-து, $-2^6 \sin^7\theta = \sin 7\theta - 7 \sin 5\theta + 21 \sin 3\theta - 35 \sin\theta$

$\therefore \quad 2^6 \sin^7\theta + \sin 7\theta - 7 \sin 5\theta + 21 \sin 3\theta - 35 \sin\theta = 0$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-15.5.**

$\cos^4\theta . \sin^6\theta$ ஐ $\theta$-ன் மடங்குகளுடைய கொசைன்களின் மூலம் விரித்தெழுதுக. (செ. ப. 1961 ஏ.)

$x = \cos\theta + i \sin\theta$ எனில்,

$x - \dfrac{1}{x} = 2 i \sin\theta,$

$x^r + \dfrac{1}{x^r} = 2 \cos r\theta,\ r = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\therefore \quad (2 \cos\theta)^4 (2i \sin\theta)^6$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 \left(x - \frac{1}{x}\right)^6$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 \left(x - \frac{1}{x}\right)^4 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$$

$$= \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^4 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$$

$$= \left(x^8 - 4x^4 + 6 - \frac{4}{x^4} + \frac{1}{x^8}\right) \left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= x^{10} - 4x^6 + 6x^2 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^6} - 2x^8 + 8x^4 - 12$$

$$+ \frac{8}{x^4} - \frac{2}{x^8} + x^6 - 4x^2 + \frac{6}{x^2} - \frac{4}{x^6} + \frac{1}{x^{10}}$$

$$= \left(x^{10} + \frac{1}{x^{10}}\right) - 2\left(x^8 + \frac{1}{x^8}\right) - 3\left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right)$$

$$+ 8\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 12$$

அதாவது, $2^4 \cos^4 \theta \,.\, 2^6 i^6 \sin^6 \theta$

$$= 2\cos 10\theta - 2(2\cos 8\theta) - 3(2\cos 6\theta) + 8(2\cos 4\theta) + 2(2\cos 2\theta) - 12$$

அ - து, $-2^9 \cos^4 \theta \,.\, \sin^6 \theta$

$$= \cos 10\theta - 2\cos 8\theta - 3\cos 6\theta + 8\cos 4\theta + 2\cos 2\theta - 6$$

$\therefore \quad \cos^4 \theta \,.\, \sin^6 \theta$

$$= \frac{1}{2^9}\,[6 - 2\cos 2\theta - 8\cos 4\theta + 3\cos 6\theta + 2\cos 8\theta - \cos 10\theta]$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-15.6**

$\cos^3 \theta \,.\, \sin^7 \theta$ ஐ $\theta$-ன் மடங்குகளுடைய சைன்கள் மூலம் விரித்தெழுதுக.

$x = \cos\theta + i\sin\theta$ எனில்,

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta$$

$$x^r - \frac{1}{x^r} = 2i\sin r\theta,\ r = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore \quad (2\cos\theta)^3 (2i\sin\theta)^7$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 \left(x - \frac{1}{x}\right)^7$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 \left(x - \frac{1}{x}\right)^4$$

$$= \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^3 \left(x - \frac{1}{x}\right)^4$$

$$= \left(x^6 - 3x^2 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^6}\right) \left(x^4 - 4x^2 + 6 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)$$

$$= x^{10} - 3x^6 + 3x^2 - \frac{1}{x^2} - 4x^8 + 12x^4 - 12 + \frac{4}{x^4} + 6x^6$$

$$- 18x^2 + \frac{18}{x^2} - \frac{6}{x^6} - 4x^4 + 12 - \frac{12}{x^4} + \frac{4}{x^8} +$$

$$x^2 - \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^6} - \frac{1}{x^{10}}$$

$$= \left(x^{10} - \frac{1}{x^{10}}\right) - 4\left(x^8 - \frac{1}{x^8}\right) + 3\left(x^6 - \frac{1}{x^6}\right)$$

$$+ 8\left(x^4 - \frac{1}{x^4}\right) - 14\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$$

அ - து, $2^3 \cos^3 \theta .\ 2^7 i^7 \sin^7 \theta$

$$= 2i \sin 10\theta - 4(2i \sin 8\theta) + 3(2i \sin 6\theta)$$

$$+ 8(2i \sin 4\theta) - 14(2i \sin 2\theta)$$

$$\therefore\ 2^9 i^6 \cos^3 \theta .\ \sin^7 \theta$$

$$= \sin 10\theta - 4\sin 8\theta + 3\sin 6\theta + 8\sin 4\theta - 14\sin 2\theta$$

$$\therefore\ -2^9 \cos^3 \theta .\ \sin^7 \theta$$

$$= \sin 10\theta - 4\sin 8\theta + 3\sin 6\theta + 8\sin 4\theta - 14\sin 2\theta$$

$$\therefore\ \cos^3 \theta .\ \sin^7 \theta$$

$$= \frac{1}{2^9}[14\sin 2\theta - 8\sin 4\theta - 3\sin 6\theta + 4\sin 8\theta - \sin 10\theta]$$

## பயிற்சி 4 (ச)

**கீழ்வருவனவற்றை நிறுவுக.**

1. $16\cos^5\theta = \cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta$

(ம. ப, 1970 செ.)

2. $32 \cos^6 \theta = \cos 6\theta + 6 \cos 4\theta + 15 \cos 2\theta + 10.$
(செ. ப. 1946 ; 1967 செ.)

3. $2^7 \cos^8 \theta = \cos 8\theta + 8 \cos 6\theta + 28 \cos 4\theta + 56 \cos 2\theta + 35$

4. $2^8 \cos^9 \theta = \cos 9\theta + 9 \cos 7\theta + 36 \cos 5\theta + 84 \cos 3\theta + 126 \cos \theta$

5. $32 \sin^6 \theta = 10 - 15 \cos 2\theta + 6 \cos 4\theta - \cos 6\theta$
(செ. ப. 1963 செ.; 1967 செ.)

6. $2^9 \sin^{10} \theta = 126 - 210 \cos 2\theta + 120 \cos 4\theta - 45 \cos 6\theta + 10 \cos 8\theta - \cos 10\theta$

7. $16 \sin^5 \theta = \sin 5\theta - 5 \sin 3\theta + 10 \sin \theta$

8. $-2^{10} \sin^{11} \theta = \sin 11\theta - 11 \sin 9\theta + 55 \sin 7\theta - 165 \sin 5\theta + 330 \sin 3\theta - 462 \sin \theta$

9. $64 (\cos^8 \theta + \sin^8 \theta) = \cos 8\theta + 28 \cos 4\theta + 35$
(செ. ப. 1967 செ.)

10. $32 \sin^4 \theta \cos^2 \theta = \cos 6\theta - 2 \cos 4\theta - \cos 2\theta + 2$
(செ. ப. 1951 மா.)

11. $64 \cos^3 \theta \sin^4 \theta = \cos 7\theta - \cos 5\theta - 3 \cos 3\theta + 3 \cos \theta$
(செ. ப. 1961 ஏ.; 1962 ஏ.; 1964 ஏ.: 1966 செ.; 1967 ஏ.)

12. $128 \sin^2 \theta \,.\, \cos^6 \theta = 5 + 4 \cos 2\theta - 4 \cos 4\theta - 4 \cos 6\theta - \cos 8\theta$

13. $256 \sin^4 \theta \cos^5 \theta = \cos 9\theta + \cos 7\theta - 4 \cos 5\theta - 4 \cos 3\theta + 6 \cos \theta$ (செ. ப. 1969 ஏ.)

14. $\cos^6 \theta \,.\, \sin^4 \theta = \frac{1}{2^9} [\cos 10\theta + 2 \cos 8\theta - 3 \cos 6\theta - 8 \cos 4\theta + 2 \cos 2\theta + 6]$ (ம. ப. 1968 ஏ.)

15. $2^5 \sin \theta . \cos^5 \theta = \sin 6\theta + 4 \sin 4\theta + 5 \sin 2\theta$

16. $64 \sin^3 \theta \cos^4 \theta = 3 \sin \theta + 3 \sin 3\theta - \sin 5\theta - \sin 7\theta$
(ம. ப. 1971 செ.)

17. $2^7 \sin^3 \theta \,.\, \cos^5 \theta = 6 \sin 2\theta + 2 \sin 4\theta - 2 \sin 6\theta - \sin 8\theta$

18. $64 \cos^2 \theta \sin^5 \theta = \sin 7\theta - 3 \sin 5\theta + \sin 3\theta + 5 \sin \theta$
(செ. ப. 1949 மா.; 1968 செ.)

19. $128 \cos^3 \theta \sin^5 \theta = 6 \sin 2\theta - 2 \sin 4\theta - 2 \sin 6\theta + \sin 8\theta$

20. $2^8 \cos^4\theta \,.\, \sin^5\theta = \sin 9\theta - \sin 7\theta - 4\sin 5\theta + 4\sin 3\theta + 6\sin\theta$ (ம. ப. 1971 ஏ.)

21. $-2^9 \cos^7\theta \sin^3\theta = \sin 10\theta + 4\sin 8\theta + 3\sin 6\theta - 8\sin 4\theta - 14\sin 2\theta$

22. $512 \sin^7\theta \cos^3\theta = 14\sin 2\theta - 8\sin 4\theta - 3\sin 6\theta + 4\sin 8\theta - \sin 10\theta$

23. $2^{11} \sin^5\theta \,.\, \cos^7\theta = \sin 12\theta + 2\sin 10\theta - 4\sin 8\theta - 10\sin 6\theta + 5\sin 4\theta + 20\sin 2\theta$

24. $\sin^5\theta = A\sin\theta + B\sin 3\theta + C\sin 5\theta$ எனில், $\cos^5\theta = A\cos\theta - B\cos 3\theta + C\cos 5\theta$ எனக் காட்டுக.

## 4-16. cos $\theta$-ன் விரித்தல் (Expansion of cos $\theta$)

$n$ ஒரு நேர் முழு எண் எனில்,

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - nC_2 \cos^{n-2}\alpha \,.\, \sin^2\alpha + nC_4 \cos^{n-4}\alpha \,.\, \sin^4\alpha - \ldots\ldots\ldots$$

$$= \cos_n\alpha - \frac{n(n-1)}{2\,!}\cos^{n-2}\alpha \,.\, \sin^2\alpha + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\,!}\cos^{n-4}\alpha \,.\, \sin^4\alpha - \ldots$$

$n\alpha = \theta$ ஆரையன்கள் எனில், $n = \dfrac{\theta}{\alpha}$

$$\therefore \cos\theta = \cos^n\alpha - \frac{\frac{\theta}{\alpha}\left(\frac{\theta}{\alpha} - 1\right)}{4\,!}\cos^{n-2}\alpha \,.\, \sin^2\alpha + \frac{\frac{\theta}{\alpha}\left(\frac{\theta}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{\theta}{\alpha} - 2\right)\left(\frac{\theta}{\alpha} - 3\right)}{4\,!}\cos^{n-4}\alpha \sin^4\alpha - \ldots\ldots$$

$$= \cos^n\alpha - \frac{\theta(\theta-\alpha)}{2\,!}\cos^{n-2}\alpha\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 + \frac{\theta(\theta-\alpha)(\theta-2\alpha)(\theta-3\alpha)}{4\,!}\cos^{n-4}\alpha\left(\frac{\text{sins}\,\alpha}{\alpha}\right)^4 - \ldots\ldots\ldots$$

$\theta$ நிலையாக இருக்கும்படி, $n \longrightarrow \infty$ என்றால், $\alpha \longrightarrow 0.$

அப்போது, $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} \longrightarrow 1$, $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ -ன் ஒவ்வோர் அடுக்கும்

(Power) $\longrightarrow$ 1 ; $\cos \alpha \longrightarrow 1$, $\cos \alpha$-ன் ஒவ்வோர் அடுக்கும் $\longrightarrow$ 1.

$$\therefore \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty \qquad (110)$$

**குறிப்பு :**

1. $\theta$ ஆனது ஆரையன் அளவையில் (Radian Measure) கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் தான் சூத்திரம் (110) உண்மையாகும்.

2. $\theta$ ஆனது எந்த மெய் எண்ணுக இருந்தாலும், $\cos\theta$-ன் விரித்தல் செல்லத் தக்கது (valid).

3. உறுப்புகள் ஒன்று விட்டு ஒன்று நேராகவும் எதிராகவும் உள்ளன.

4. $\theta$-ன் அடுக்குகள் இரட்டையாக (even) உள்ளன.

5. $x^\circ = \frac{\pi}{180} x$ ஆரையன்கள்

$$\therefore \quad \cos x^0 = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi x}{180}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi x}{180}\right)^4 - \ldots\ldots \infty \quad (111)$$

## 4.17. sin $\theta$-ன் விரித்தல் (Expansion of sin $\theta$)

*n* ஒரு நேர் முழு எண் எனில்,

$$\sin n\alpha = nC_1 \cos^{n-1}\alpha \,.\, \sin\alpha - nC_3 \cos^{n-3}\alpha \,.\, \sin^3\alpha + \ldots\ldots$$

$$= n\cos^{n-1}\alpha \,.\, \sin\alpha - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3}\alpha \,.\, \sin^3\alpha + \ldots\ldots$$

$n\alpha = \theta$ ஆரையன்கள் எனில், $n = \frac{\theta}{\alpha}$

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{\theta}{\alpha}\cos^{n-1}\alpha \,.\, \sin\alpha - \frac{\frac{\theta}{\alpha}\left(\frac{\theta}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{\theta}{\alpha} - 2\right)}{3!} \,.\, \cos^{n-3}\alpha \,.\, \sin^3\alpha + \ldots\ldots$$

$$= \theta\cos^{n-1}\alpha \,.\, \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) - \frac{\theta(\theta-\alpha)(\theta-2\alpha)}{3!}\cos^{n-3} \,.\, \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^3 + \ldots\ldots$$

$\theta$ நிலையாக இருக்கும்படி, $n \longrightarrow \infty$ என்றால், $\alpha \longrightarrow 0$.

அப்பொழுது,

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} \longrightarrow 1, \ \frac{\sin \alpha}{\alpha}\text{-ன் ஒவ்வோர் அடுக்கும்} \longrightarrow 1\ ;$$

$$\cos \alpha \longrightarrow 1, \ \cos \alpha\text{-ன் ஒவ்வோர் அடுக்கும்} \longrightarrow 1.$$

$$\therefore \quad \sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3\,!} + \frac{\theta^5}{5\,!} - \frac{\theta^7}{7\,!} + \ldots\ldots\ldots \infty \qquad (112)$$

குறிப்பு :

1. $\theta$ ஆனது ஆரையன் அளவில் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் தான், சூத்திரம் (112) உண்மையாகும்.

2. $\theta$ ஆனது எந்த மெய் எண்ணுக இருந்தாலும், $\sin \theta$-ன் விரித்தல் செய்யத் தக்கது (Valid).

3. உறுப்புகள் ஒன்று விட்டு ஒன்று நேராகவும் எதிராகவும் உள்ளன.

4. $\theta$-ன் அடுக்குகள் ஒற்றையாக (Odd) உள்ளன.

5. $x^\circ = \frac{\pi}{180}\, x$ ஆரையன்கள்.

$$\therefore \quad \sin x^0 = \frac{\pi}{180}\, x - \frac{1}{3\,!}\left(\frac{\pi x}{180}\right)^3 + \frac{1}{5\,!}\left(\frac{\pi x}{180}\right)^5 - \ldots\ldots\ldots \infty \qquad (113)$$

## 4.18. tan $\theta$-ன் விரித்தல் (Expansion of tan $\theta$)

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= \frac{\theta - \dfrac{\theta^3}{3\,!} + \dfrac{\theta^5}{5\,!} - \dfrac{\theta^7}{7\,!} + \ldots\ldots\ldots \infty}{1 - \dfrac{\theta^2}{2\,!} + \dfrac{\theta^4}{4\,!} - \dfrac{\theta^6}{6\,!} + \ldots\ldots\ldots \infty},$$

[சூத்திரங்கள் (112), (110)-ன்படி]

$$\equiv a_0 + a_1\,\theta + a_2\,\theta^2 + a_3\,\theta^3 + a_4\,\theta^4 + a_5\,\theta^5 + a_6\,\theta^6 + a_7\,\theta^7$$

[$\theta$ ஐ மிகச் சிறியதெனக் கொண்டு, $\theta$-ன் 7 ஆம் அடுக்கிற்கு உயர்ந்த அடுக்குகளைத் தவிர்க்க,]

எனவே,

$$\left(\theta - \frac{\theta^3}{3\,!} + \frac{\theta^5}{5\,!} - \frac{\theta^7}{7\,!} + \ldots\ldots\ldots \infty\right)$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots\ldots\ldots \infty\right)$$

$$\times (a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3 + a_4\theta^4 + a_5\theta^5 + a_6\theta^6 + a_7\theta^7)$$

இரண்டு பக்கங்களிலுமுள்ள $\theta$-ன் ஒரே மாதிரி அடுக்குகளின் குணகங்களைச் சமப்படுத்த,

$$a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = 0$$

$$1 = a_1$$

$$-\frac{1}{3!} = a_3 - \frac{a_1}{2!}$$

$$\frac{1}{5!} = a_5 - \frac{a_3}{2!} + \frac{a_1}{4!}$$

$$-\frac{1}{7!} = a_7 - \frac{a_5}{2!} + \frac{a_3}{4!} - \frac{a_1}{6!}$$

$$\therefore \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_5 = \frac{2}{15}, \quad a_7 = \frac{17}{315}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \theta + \frac{1}{3}\theta^3 + \frac{2}{15}\theta^5 + \frac{17}{315}\theta^7$$

[$\theta$-ன் 7ஆம் அடுக்குவரை] (114)

**குறிப்பு:**

$\theta$ ஆனது ஆரையன் அளவில் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் தான் சூத்திரம் (114) உண்மையாகும்.

## மாதிரிக் கணக்குகள்

**மாதிரிக் கணக்கு 4-19.1.**

$$\frac{1}{6}\sin^3\theta = \frac{\theta^3}{3!} - (1 + 3^2)\frac{\theta^5}{5!} + (1 + 3^2 + 3^4)\frac{\theta^7}{7!}$$

$- \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$ **என நிறுவுக.**

$$4\sin^3\theta = 3\sin\theta - \sin 3\theta$$

$$= 3\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty\right]$$

$$-\left[3\theta - \frac{3^3\theta^3}{3!} + \frac{3^5\theta^5}{5!} - \frac{3^7\theta^7}{7!} + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty\right]$$

$$= (3^3 - 3)\frac{\theta^3}{3\,!} - (3^5 - 3)\frac{\theta^5}{5\,!} + (3^7 - 3)\frac{\theta^7}{7\,!} - \ldots\ldots\ldots \infty$$

$$= 3\,(3^2 - 1)\frac{\theta^3}{3\,!} - 3\,(3^4 - 1)\frac{\theta^5}{5\,!} + 3\,(3^6 - 1)\frac{\theta^7}{7\,!} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \infty$$

$$= 3\,(3^2 - 1)\left[\frac{\theta^3}{3\,!} - (1 + 3^2)\frac{\theta^5}{5\,!} + (1 + 3^2 + 3^4)\frac{\theta^7}{7\,!} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \infty\right]$$

$$\therefore \quad \frac{1}{6}\sin^3\theta = \frac{\theta^3}{3\,!} - (1 + 3^2)\frac{\theta^5}{5\,!} + (1 + 3^2 + 3^4)\frac{\theta^7}{7\,!} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \infty$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-19.2.**

$$\underset{\theta \to 0}{\text{எல்லை}}\ \frac{\sin a\,\theta}{\sin b\,\theta} = \frac{a}{b}$$ **என நிறுவுக.**

$$\underset{\theta \to 0}{\text{எல்லை}}\ \frac{\sin a\,\theta}{\sin b\,\theta}$$

$$= \underset{\theta \to 0}{\text{எல்லை}}\ \frac{a\,\theta - \dfrac{a^3\,\theta^3}{3\,!} + \dfrac{a^5\,\theta^5}{5\,!} - \dfrac{a^7\,\theta^7}{7\,!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \infty}{b\,\theta - \dfrac{b^3\,\theta^3}{3\,!} + \dfrac{b^5\,\theta^5}{5\,!} - \dfrac{b^7\,\theta^7}{7\,!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \infty}$$

$$= \underset{\theta \to 0}{\text{எல்லை}}\ \frac{a - \dfrac{a^3\,\theta^2}{3\,!} + \dfrac{a^5\,\theta^4}{5\,!} - \dfrac{a^7\,\theta^6}{7\,!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \infty}{b - \dfrac{b^3\,\theta^2}{3\,!} + \dfrac{b^5\,\theta^4}{5\,!} - \dfrac{b^7\,\theta^6}{7\,!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \infty}$$

$$= \frac{a}{b}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-19.3.**

$$\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}}\ \frac{2\sin x - \sin 2x}{x\sin^2 x} = 1$$ **என நிறுவுக.**

(செ. ப. 1968 செ.)

$$\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}}\ \frac{2\sin x - \sin 2x}{x\sin^2 x}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{2\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\dots\dots \infty\right] - \left[2x - \frac{2^3 x^3}{3!} + \frac{2^5 x^5}{5!} - \frac{2^7 x^7}{7!} + \dots\dots\dots \infty\right]}{x\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\dots \infty\right]^2}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\frac{(2^3 - 2)}{3!} x^3 - \frac{(2^5 - 2)}{5!} x^5 + \frac{(2^7 - 2)}{7!} x^7 - \dots\dots \infty}{x^3\left[1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots\dots\dots \infty\right]^2}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\frac{(2^3 - 2)}{3!} - \frac{(2^5 - 2)}{5!} x^2 + \frac{(2^7 - 2)}{7!} x^4 - \dots\dots\dots \infty}{\left[1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots\dots\dots \infty\right]^2}$$

$$= \frac{2^3 - 2}{3!} = \frac{8 - 2}{6} = 1$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-19.4.**

$$\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\cos x - \log(1 + x) + \sin x - 1}{e^x - (1 + x)} = 0$$ **என நிறுவுக.**

$$\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\cos x - \log(1 + x) + \sin x - 1}{e^x - (1 + x)}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\left[\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\dots \infty\right) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\dots \infty\right) + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\dots\dots \infty\right) - 1\right]}{\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\dots \infty\right) - (1 + x)}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{-x^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3!}\right) + x^4\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4!}\right) + \dots\dots\dots \infty}{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\dots\dots \infty}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3!}\right)+x^2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4!}\right)+\ldots\ldots\ldots\infty}{\frac{1}{2!}+\frac{x}{3!}+\frac{x^3}{5!}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\infty}$$

$$= \frac{0}{\frac{1}{2!}} = 0$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-19.5.**

**எல்லை** $\lim_{\theta \to 0}\left(\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\theta^2}\right) = \frac{1}{3}$ **என நிறுவுக.** (செ. ப.)

எல்லை $\lim_{\theta \to 0}\left(\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\theta^2}\right)$

$$= \lim_{\theta \to 0}\left[(\sin\theta)^{-2} - \frac{1}{\theta^2}\right]$$

$$= \lim_{\theta \to 0}\left[\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\ldots\infty\right)^{-2} - \frac{1}{\theta^2}\right]$$

$$= \lim_{\theta \to 0}\left[\theta^{-2}\left(1 - \frac{\theta^2}{3!} + \frac{\theta^4}{5!} + \ldots\ldots\infty\right)^{-2} - \frac{1}{\theta^2}\right]$$

$$= \lim_{\theta \to 0}\left[\frac{1}{\theta^2}\left\{1 - \left(\frac{\theta^2}{3!} - \frac{\theta^4}{5!} + \ldots\ldots\infty\right)\right\}^{-2} - \frac{1}{\theta^2}\right]$$

$$= \lim_{\theta \to 0}\left[\frac{1}{\theta^2}\left\{1 - \left(\frac{\theta^2}{6} - \frac{\theta^4}{120} + \ldots\ldots\infty\right)\right\}^{-2} - \frac{1}{\theta^2}\right]$$

$$= \lim_{\theta \to 0}\left[\frac{1}{\theta^2}\left\{1 + 2\left(\frac{\theta^2}{6} - \frac{\theta^4}{120} + \ldots\ldots\right) + 3\left(\frac{\theta^2}{6} - \frac{\theta^4}{120} + \ldots\ldots\right)^2 + \ldots\ldots\right\} - \frac{1}{\theta^2}\right]$$

$$= \lim_{\theta \to 0}\left[\frac{1}{\theta^2}\left\{1 + \frac{2}{6}\theta^2 + \left(\frac{3}{36} - \frac{2}{120}\right)\theta^4 + \ldots\ldots\right\} - \frac{1}{\theta^2}\right]$$

$$= \lim_{\theta \to 0}\left[\frac{1}{\theta^2}\left\{1 + \frac{1}{3}\theta^2 + \frac{1}{15}\theta^4 + \ldots\ldots\right\} - \frac{1}{\theta^2}\right]$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \left[\left(\frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}\theta^2 + \ldots\ldots\right) - \frac{1}{\theta^2}\right]$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\theta^2 + \ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{1}{3}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-19.6.**

**எல்லை** $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{6}}$ **என நிறுவுக.**

எல்லை $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{x^2}}$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots \infty}{x}\right]^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\ldots \infty\right]^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[1 - \frac{x^2}{6}\right]^{-\frac{1}{x^2}},$$

$x$-ன் உயர்ந்த அடுக்குகளைத் தவிர்க்க.

$$= \lim_{x \to 0} \left[\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^{-\frac{6}{x^2}}\right]^{\frac{1}{6}}$$

$$= e^{\frac{1}{6}}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-19.7.**

**எல்லை** $\lim_{n \to \infty} \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n^2} = e^{-\frac{x^2}{2}}$ **என நிறுவுக.**

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n^2}$$

$$= \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left[1 - \frac{x^2}{2!\, n^2} + \frac{1}{4!} \frac{x^4}{n^4} - \ldots\ldots \infty\right]^{n^2}$$

$$= \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left[1 - \frac{x^2}{2n^2}\right]^{n^2}, \ \frac{1}{n}\text{-ன்}$$

உயர்ந்த அடுக்குகளைத் தவிர்க்க.

$$= \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left[\left(1 - \frac{x^2}{2n^2}\right)^{-\frac{2n^2}{x^2}}\right]^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-19. 8.**

$$\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{எல்லை}} (\sec x - \tan x) = 0$$ **என நிறுவுக.**

(செ. ப. 1945 மா.)
(செ. ப. 1968 ஏ.)

$$\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{எல்லை}} (\sec x - \tan x)$$

$$= \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{எல்லை}} \left[\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right]$$

$$= \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{எல்லை}} \left[\frac{1 - \sin x}{\cos x}\right]$$

$$= \underset{\theta \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}$$

$$= \underset{\theta \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{1 - \cos\theta}{-\sin\theta}$$

$$= \underset{\theta \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\dots\dots \infty\right) - 1}{\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\dots\dots \infty}$$

(எல்லை $\theta \to 0$)

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{-\frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\dots\dots \infty}{\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\dots\dots \infty}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{-\frac{\theta}{2!} + \frac{\theta^3}{4!} - \frac{\theta^5}{6!} + \dots\dots\dots \infty}{1 - \frac{\theta^2}{3!} + \frac{\theta^4}{5!} - \dots\dots\dots \infty}$$

$$= \frac{0}{1}$$

$$= 0$$

**மாற்று முறை :**

எல்லை $x \to \frac{\pi}{2}$ $(\sec x - \tan x)$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x) \cos x}{\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x) \cos x}{1 - \sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

$$= \frac{0}{1 + 1}$$

$$= 0$$

(இங்கு $\lim$ என்பது பக்கத்தில் அச்சிடப்பட்ட "எல்லை")

**மாதிரிக் கணக்கு 4-19. 9.**

$$\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{எல்லை}} (\sin x)^{\tan x} = 1$$ **என நிறுவுக.**

(செ. ப. 1967 செ.)

$$\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{எல்லை}} (\sin x)^{\tan x}$$

$$= \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{எல்லை}} (\sin^2 x)^{\frac{\tan x}{2}}$$

$$= \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{எல்லை}} (1 - \cos^2 x)^{\frac{\tan x}{2}}$$

$$= \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{எல்லை}} \left[ (1 - \cos^2 x)^{-\frac{1}{\cos^2 x}} \right]^{-\frac{\tan x}{2} \cdot \cos^2 x}$$

$$= \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{எல்லை}} \left[ (1 - \cos^2 x)^{-\frac{1}{\cos^2 x}} \right]^{-\frac{\sin x . \cos x}{2}}$$

$$= \left[ \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{எல்லை}} (1 - \cos^2 x)^{-\frac{1}{\cos^2 x}} \right]^{\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{எல்லை}} - \frac{\sin x . \cos x}{2}}$$

$$= e^0 = 1$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-19.10.**

$$\underset{\beta \to \alpha}{\text{எல்லை}} \frac{\alpha \sin \beta - \beta \sin \alpha}{\alpha \cos \beta - \beta \cos \alpha} = \tan (\alpha - \tan^{-1} \alpha)$$ **என நிறுவுக.**

(ம. ப. 1971 ஏ.)

$\beta = \alpha + \theta$ எனக் கொண்டால், $\beta$ ஆனது $\alpha$ ஐ அணுகும் போது, $\theta \to 0$

$$\therefore \quad \underset{\beta \to \alpha}{\text{எல்லை}} \frac{\alpha \sin \beta - \beta \sin \alpha}{\alpha \cos \beta - \beta \cos \alpha}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\alpha \sin(\alpha + \theta) - (\alpha + \theta) \sin \alpha}{\alpha \cos(\alpha + \theta) - (\alpha + \theta) \cos \alpha}$$

(எல்லை $\theta \to 0$)

$$= \lim_{\theta \to 0} \left\{ \frac{\alpha (\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta) - \alpha \sin \alpha - \theta \sin \alpha}{\alpha (\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta) - \alpha \cos \alpha - \theta \cos \alpha} \right\}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \left[ \frac{\alpha \sin \alpha \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \ldots\ldots \infty\right) + \alpha \cos \alpha \left(\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \ldots\ldots \infty\right)\right) - \alpha \sin \alpha - \theta \sin \alpha}{\alpha \cos \alpha \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \ldots\ldots \infty\right) - \alpha \sin \alpha \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \ldots\ldots \infty\right) - \alpha \cos \alpha - \theta \cos \alpha} \right]$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{(\alpha \cos \alpha - \sin \alpha)\, \theta - \alpha \sin \alpha \frac{\theta^2}{2!} + \ldots\ldots}{-(\alpha \sin \alpha + \cos \alpha)\, \theta - \alpha \cos \alpha \frac{\theta^2}{2!} + \ldots\ldots}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{(\alpha \cos \alpha - \sin \alpha) - \alpha \sin \alpha \frac{\theta}{2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots}{-\alpha \sin \alpha - \cos \alpha - \alpha \cos \alpha \frac{\theta}{2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots}$$

$$= \frac{\alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{-\alpha \sin \alpha - \cos \alpha}$$

$$= \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha + \alpha \sin \alpha}$$

$$= \frac{\tan \alpha - \alpha}{1 + \alpha \tan \alpha},$$ தொகுதியையும், பகுதியையும் $\cos \alpha$ ஆல் வகுக்க.

$$= \frac{\tan \alpha - \tan(\tan^{-1} \alpha)}{1 + \tan \alpha \tan(\tan^{-1} \alpha)}$$

$$= \tan(\alpha - \tan^{-1} \alpha)$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-19.11.**

$$\lim_{\theta \to 0} \left[ \frac{\theta(a + b\cos\theta) - c\sin\theta}{\theta^5} \right] = 1 \text{ ஆனால்,}$$

$a$, $b$, $c$-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

(செ. ப. 1954 செ.) (ம. ப. 1971 ஏ.)

$$\lim_{\theta \to 0} \left[ \frac{\theta(a + b\cos\theta) - c\sin\theta}{\theta^5} \right] = 1$$

அ-து,
$$\lim_{\theta \to 0} \left[ \frac{\theta\left\{a + b\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots\infty\right)\right\} - c\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots\ldots\infty\right)}{\theta^5} \right] = 1$$

$$\lim_{\theta \to 0} \left[ \frac{\theta\left\{a + b\left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \frac{\theta^6}{720} + \ldots\infty\right)\right\} - c\left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \frac{\theta^7}{5040} + \ldots\ldots\infty\right)}{\theta^5} \right] = 1$$

$$\lim_{\theta \to 0} \left[ \frac{(a + b - c)\theta + \left(\frac{c}{6} - \frac{b}{2}\right)\theta^3 + \left(\frac{b}{24} - \frac{c}{120}\right)\theta^5 + \left(\frac{c}{5040} - \frac{b}{720}\right)\theta^7 + \ldots\ldots}{\theta^5} \right] = 1$$

$$\therefore \quad a + b - c = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

$$\frac{c}{6} - \frac{b}{2} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

$$\frac{b}{24} - \frac{c}{120} = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(iii)}$$

(i), (ii) (iii)-லிருந்து $a = 120$, $b = 60$, $c = 180$.

**மாதிரிக் கணக்கு 4-19.12.**

$x$-ன் 4 ஆம் அடுக்குகளுக்கு உயர்ந்த அடுக்குகள் தவிர்க்கத் தக்கவை எனில்,

$\cos(\sin x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1967 ஏ.)

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{\sin^2 x}{2!} + \frac{\sin^4 x}{4!} - \ldots\ldots\ldots \infty$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \infty\right)^2$$

$$+ \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \infty\right)^4 - \ldots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots \infty\right)^2$$

$$+ \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots \infty\right)^4 - \ldots\ldots\ldots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - 2\frac{x^4}{6}\right) + \frac{x^4}{24} \quad [x\text{-ன் 4 ஆம் அடுக்கு வரை}]$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{24}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-19.13.**

$\theta$ **சிறியதாக இருக்கும்போது,** $\theta$**-க்கும்** $\dfrac{3\sin\theta}{2+\cos\theta}$ **-க்கும் உள்ள வேறுபாடு ஏறக்குறைய** (nearly) $\dfrac{\theta^5}{180}$ **என நிறுவுக.**

$$\frac{3\sin\theta}{2+\cos\theta} = \frac{3\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\ldots\ldots \infty\right]}{2 + 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots\ldots\ldots \infty}$$

$$= \frac{3\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\ldots\ldots \infty\right]}{3 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots\ldots\ldots \infty}$$

$$= \frac{3\left[\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \ldots\ldots\ldots \infty\right]}{3 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \ldots\ldots\ldots \infty}$$

$$= \frac{\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \dots\dots\dots \infty}{1 - \frac{\theta^2}{6} + \frac{\theta^4}{72} - \dots\dots\dots \infty}$$

$$= \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \dots\dots\dots \infty \right) \times \left[ 1 - \left( \frac{\theta^2}{6} - \frac{\theta^4}{72} + \dots\dots\dots \infty \right) \right]^{-1}$$

$$= \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \dots\dots\dots \infty \right) \times \left[ 1 + \left( \frac{\theta^2}{6} - \frac{\theta^4}{72} + \dots\dots\dots \infty \right) + \left( \frac{\theta^2}{6} - \frac{\theta^4}{72} + \dots\dots\dots \infty \right)^2 + \dots\dots\dots \infty \right]$$

$$= \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \dots\dots\dots \infty \right) \times \left[ 1 + \frac{\theta^2}{6} + \left( \frac{1}{36} - \frac{1}{72} \right) \theta^4 + \dots\dots\dots \infty \right]$$

$$= \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \dots\dots\dots \infty \right) \times \left( 1 + \frac{\theta^2}{6} + \frac{\theta^4}{72} + \dots\dots\dots\dots \infty \right)$$

$$= \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} + \frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^5}{36} + \frac{\theta^5}{72},$$

[$\theta$-ன் 5 ஆம் அடுக்கு வரை].

$$= \theta + \theta^5 \left[ \frac{1}{120} - \frac{1}{36} + \frac{1}{72} \right]$$

$$= \theta + \theta^5 \left[ \frac{6 - 20 + 10}{720} \right]$$

$$= \theta + \theta^5 \left( \frac{-4}{720} \right)$$

$$= \theta - \frac{\theta^5}{180}$$

$$\therefore \quad \theta - \frac{3 \sin \theta}{2 + \cos \theta} = \frac{\theta^5}{180}$$ (ஏறக்குறைய)

**மாதிரிக் கணக்கு 4-19.14.**

$\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{2165}{2166}$ எனில், $\theta$-ன் மதிப்பு ஏறக்குறைய (nearly) 3°-ன் வட்ட அளவை (Radian Measure) ஆகும் என நிறுவுக.

(செ. ப. 1952 செ.)

$\theta$ வட்ட அளவையில் இருந்தால், $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ என்பது நமக்குத் தெரியும்.

கொள்கைப்படி, $\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{2165}{2166} \simeq 1$ ........... (i)

$\therefore$ $\theta$ ஆனது சிறியது.

இப்பொழுது, $$\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots\ldots\ldots\infty}{\theta}$$

$$= 1 - \frac{\theta^2}{6} \text{ (தோராயமாக) } \ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

(i), (ii)-லிருந்து, $$1 - \frac{\theta^2}{6} = \frac{2165}{2166}$$

$$= 1 - \frac{1}{2166}$$

$$\therefore \frac{\theta^2}{6} = \frac{1}{2166}$$

அ-து, $$\theta^2 = \frac{1}{361}$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{1}{19} \text{ ஆரையன்}$$

$$= \frac{1}{19} \times 57^\circ\, 17'\, 44 \cdot 8''$$

$$= 3^\circ \text{ (ஏறக்குறைய)}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-19.15.**

$\left(\cos\frac{\pi}{3} + \theta\right) = 0 \cdot 49$ எனில், $\theta$-ன் மதிப்பு ஏறக்குறைய 39· 7′-ன் வட்ட அளவை ஆகும் என நிறுவுக.

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = \cdot 5$$

கொள்கைப்படி, $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)=0\cdot 49$

எனவே, $\theta$ ஆனது சிறியது.

இப்பொழுது, $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\theta-$

$$\sin\frac{\pi}{3}\cdot\ \sin\theta=0\cdot 49$$

அ-து, $\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta=0\cdot 49$

$\theta$ வட்ட அளவையில் இருந்தால்,

$$\frac{1}{2}\left[1-\frac{\theta^2}{2!}+\ldots\ldots\infty\right]-\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\ldots\ldots\infty\right]=0{\cdot}49$$

தோராய மதிப்பு எடுத்தோமானால்,

$$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\theta=0\cdot 49$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{3}}{2}\theta=\frac{1}{2}-0\cdot 49=0\cdot 50-0\cdot 49=0\cdot 01$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{0\cdot 02}{\sqrt{3}}\text{ ஆரையன்}$$

$$=\frac{0\cdot 02\times\sqrt{3}}{3}\text{ ஆரையன்}$$

$$=\frac{0\cdot 02\times 1\cdot 732}{3}\text{ ஆரையன்}$$

$$=\frac{0\cdot 03464}{3}\text{ ஆரையன்}$$

$$=0\cdot 01155\text{ ஆரையன்}$$

$$=0\cdot 01155\times 57^\circ\ 18'$$

$$=39\cdot 7'\ \text{(ஏறக்குறைய)}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 4-19.16.**

$\tan x=1\cdot 0004$ **எனில்,** $x$**-ன் தோராய மதிப்பைக் காண்க.**

$$\tan\frac{\pi}{4}=1.$$

ஆனால், கொள்கைப்படி, $\tan x=1\cdot 0004\doteq 1$ .

$$\therefore\quad x\doteq\frac{\pi}{4}$$

எனவே, $x = \frac{\pi}{4} + \theta$ எனில், $\theta$ ஆனது சிறியது.

இப்பொழுது, $\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = 1 \cdot 0004$

அ-து, $$\frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\theta}{1 - \tan\frac{\pi}{4} . \tan\theta} = 1 \cdot 0004$$

அ-து, $$\frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta} = \frac{1{\cdot}0004}{1}$$

$$\therefore \frac{1 + \tan\theta - (1 - \tan\theta)}{1 + \tan\theta + (1 - \tan\theta)} = \frac{1{\cdot}0004 - 1}{1{\cdot}0004 + 1}$$

அ-து, $$\frac{2\tan\theta}{2} = \frac{0{\cdot}0004}{2{\cdot}0004}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{0{\cdot}0004}{2{\cdot}0004}$$

அ-து, $\theta + \frac{\theta^3}{3} + \ldots = \frac{0{\cdot}0004}{2{\cdot}0004}$ [சூத்திரம் (114)-ன் படி]

தோராய மதிப்பு எடுத்தோமானால்,

$$\theta = \frac{0{\cdot}0004}{2{\cdot}0000} \text{ ஆரையன்}$$

$$= \frac{1}{5000} \text{ ஆரையன்}$$

ஆனால், $x = \frac{\pi}{4} + \theta$ ஆரையன்

$$\therefore x = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{5000}\right)$$

ஆரையன் (தோராயமாக).

**மாதிரிக் கணக்கு 4-19.7.**

**ஒரு வட்ட வில்லின் நாணின் நீளம் $a$; அதே வட்ட வில்லின் அரைப் பாகத்தின் நாணின் நீளம் $b$, கால் பாகத்தின் நாணின் நீளம் $c$ எனில், அந்த வட்ட வில்லின் நீளம், தோராயமாக, $\frac{a - 40b + 256c}{45}$ என நிறுவுக.** (செ. ப. 1937 செ.)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள வில் வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோணம் $8\theta$ ஆரையன் எனக் கொண்டால், அது பரிதியில் தாங்கும் கோணம் $4\theta$. மேலும், அந்த வில்லின் அரைப்பாகம்

பரிதியில் தாங்கும் கோணம் $2\theta$ ; அதன் கால் பாகம் பரிதியில் தாங்கும் கோணம் $\theta$. வட்டத்தின் ஆரம் R எனக் கொண்டால்,

$$a = 2R \sin 4\theta$$

$$b = 2R \sin 2\theta$$

$$c = 2R \sin \theta$$

வில்லின் நீளம் $= R \,.\, 8\theta$

இப்பொழுது,

$$\frac{a - 40b + 256c}{45}$$

$$= \frac{1}{45}\left[2R \sin 4\theta - 40(2R \sin 2\theta) + 256(2R \sin \theta)\right]$$

$$= \frac{2R}{45}\left[\sin 4\theta - 40 \sin 2\theta + 256 \sin \theta\right]$$

$$= \frac{2R}{45}\left[4\theta - \frac{4^3\theta^3}{3!} + \frac{4^5\theta^5}{5!} - \frac{4^7\theta^7}{7!} + \ldots\ldots \infty\right.$$

$$-40\left(2\theta - \frac{2^3\theta^3}{3!} + \frac{2^5\theta^5}{5!} - \frac{2^7\theta^7}{7!} + \ldots\ldots \infty\right)$$

$$\left.+ 256\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots\ldots \infty\right)\right]$$

$$= \frac{2R}{45}\left[\left(4\theta - \frac{64\theta^3}{6} + \frac{1024\theta^5}{120} - \frac{16384\theta^7}{5040} + \ldots \infty\right)\right.$$

$$-40\left(2\theta - \frac{8\theta^3}{6} + \frac{32\theta^5}{120} - \frac{128\theta^7}{5040} + \ldots\ldots \infty\right)$$

$$\left.+ 256\left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \frac{\theta^7}{5040} + \ldots\ldots \infty\right)\right]$$

$$= \frac{2R}{45}\left[(4 - 80 + 256)\theta + (-64 + 320 - 256)\frac{\theta^3}{6}\right.$$

$$+ (1024 - 1280 + 256)\frac{\theta^5}{120}$$

$$\left.+ (-16384 + 5120 - 256)\frac{\theta^7}{5040} + \ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{2R}{45}\left[180\theta - \frac{11520}{5040}\theta^7 + \ldots\ldots\right]$$

$= \frac{2\,R}{45}\;.\;180\,\theta$ [$\theta$-ன் 7ஆம் அடுக்கையும், அதற்கு மேலுள்ள அடுக்குகளையும் தவிர்க்க]

$= 8\,R\,\theta$

$= R\,.\,8\,\theta$

= வில்லின் நீளம்.

## பயிற்சி 4 (உ)

1. $\cos^3\theta = \frac{1}{4}\left[4 - \frac{\theta^2}{2!}(3^2+3) + \frac{\theta^4}{4!}(3^4+3) - \ldots\ldots\infty\right]$ என நிறுவுக.

2. $\cos^4\theta = 1 - \frac{2}{2!}\theta^2(1+1) + \frac{2^3\,\theta^4}{4!}(1+4)$

$- \frac{2^5\,\theta^6}{6!}(1+4^2) + \frac{2^7\,\theta^8}{8!}(1+4^3) - \ldots\infty$ என நிறுவுக.

3. $x = \frac{2}{1!} - \frac{4}{3!} + \frac{6}{5!} - \frac{8}{7!} + \ldots\ldots\infty,$

$y = 1 + \frac{2}{1!} - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \ldots\ldots\infty$ எனில்,

$x^2 = y$ எனக் காட்டுக.

**கீழ் வருவனவற்றை நிறுவுக.**

4. (a) $\lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} = \frac{1}{2}$ (செ. ப. 1960 ஏ.)

(b) $\lim_{\theta \to 0} \theta.\cot 2\theta = \frac{1}{2}$

(c) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan m\theta}{\tan n\theta} = \frac{m}{n}$

(d) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\sqrt{\theta}}{\sqrt{\sin\theta}} = 1$ (செ. ப. 1947 செ.)

(e) $\lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta+\sin\theta}{1-\cos\theta-\sin\theta} = -1$

(f) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta}{\theta} = \frac{1}{2}$

(g) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1} = 1$

(எல்லை = limit)

(h) $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\theta - \sin\theta}{\sin\theta\,(1 - \cos\theta)} = \dfrac{1}{3}$ (எல்லை)

(i) $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{n\sin\theta - \sin n\theta}{\theta\,(\cos\theta - \sin n\theta)} = 0$ (எல்லை)

(செ. ப. 1938 செ.)

(j) $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{n\sin\theta - \sin n\theta}{\theta\,(\cos\theta - \cos n\theta)} = \dfrac{n}{3}$ (எல்லை)

(k) $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\cot\theta + \cot 2\theta}{\cot 3\theta} = \dfrac{9}{2}$ (எல்லை)

5. (a) $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\sin 2\theta - 2\sin\theta}{\theta^3} = -1$ (எல்லை)

(b) $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\tan 2\theta - 2\tan\theta}{\theta^3} = 2$ (எல்லை) (செ. ப.)

(c) $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\tan 2\theta - 2\sin\theta}{\theta^3} = 3$ (எல்லை) (செ. ப. 1962 செ.)

(d) $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\tan 3\theta - 3\tan\theta}{\theta^3} = 8$ (எல்லை) (செ. ப. 1961 செ.)

(e) $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\theta + \sin 2\theta - 3\theta}{\theta^3} = -\dfrac{3}{2}$ (எல்லை)

(f) $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\theta + \sin 6\theta - 7\theta}{\theta^5} = -\infty$ (எல்லை)

(g) $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\tan\theta - \sin\theta}{\sin^3\theta} = \dfrac{1}{2}$ (எல்லை)

(h) $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{e^{\theta} - 1 + \log(1 - \theta)}{\sin^3\theta} = -\dfrac{1}{6}$ (எல்லை)

6. (a) $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\sin^2\theta + \sin^2 3\theta}{1 - \cos 2\theta} = 5$ (எல்லை)

(b) $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\sin^2 3\theta - \sin^2\theta}{\cos 4\theta - \cos\theta} = -\dfrac{16}{15}$ (எல்லை)

(c) $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\cos^2 a\theta - \cos^2 b\theta}{1 - \cos c\theta} = \dfrac{2(b^2 - a^2)}{c^2}$ (எல்லை)

7. (a) $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\cos 1 - \cos(\cos\theta)}{\theta^2} = -\dfrac{1}{2}\sin 1$ (எல்லை)

(செ. ப. 1960 ஏ.)

(b) $\underset{\theta \to 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{\log \cos \theta + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2\theta}{\theta^4} = -\dfrac{1}{4}$

8. (a) $\underset{\theta \to 0}{\text{எல்லை}} \left(\dfrac{\tan \theta}{\theta}\right)^{\frac{3}{\theta^2}} = e$

(b) $\underset{\theta \to 0}{\text{எல்லை}} \left(\dfrac{\tan \theta}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} = 1$

(c) $\underset{\theta \to 0}{\text{எல்லை}} \left(\cos \dfrac{\theta}{m} + \sin \dfrac{3\theta}{m}\right)^{\frac{m}{\theta}} = e^3$

(d) $\underset{\theta \to 0}{\text{எல்லை}} (\cos m\theta)^{\frac{n}{\theta^2}} = e^{-\frac{n m^2}{2}}$

(e) $\underset{\theta \to 0}{\text{எல்லை}} (\cos a\theta)^{\cot^2 b\theta} = e^{-\frac{a^2}{2b^2}}$

9. (a) $\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left(\cos \dfrac{\theta}{n}\right)^n = 1$

(b) $\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left(\dfrac{\sin \frac{\theta}{n}}{\frac{\theta}{n}}\right)^n = 1$

(c) $\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left(\cos \dfrac{\theta}{n}\right)^{2n^2} = e^{-\theta^2}$

(d) $\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left(\cos \dfrac{\theta}{n}\right)^{n^3} = 0$

10. (a) $\underset{\theta \to 0}{\text{எல்லை}} (\sin \theta)^{\theta} = 1$

(b) $\underset{\theta \to 0}{\text{எல்லை}} (\operatorname{cosec} \theta)^{\theta} = 1$

11. (a) $\underset{\theta \to \frac{\pi}{2}}{\text{எல்லை}} \dfrac{\sec \theta}{\tan \theta} = 1$

(b) $\underset{\theta \to \frac{\pi}{2}}{\text{எல்லை}} \dfrac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} = \infty$

(c) $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta - \sin 2\theta}{\cos 3\theta} = \frac{1}{3}$ (எல்லை)

(d) $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cot 2\theta + \tan 3\theta}{\sec\theta} = -\frac{1}{6}$ (எல்லை)

(e) $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta + \cos 4\theta}{1 - \sin\theta} = -12$ (எல்லை)

(f) $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3\theta + \cos 4\theta}{\sin\theta + \cos 2\theta} = -\frac{7}{3}$ (எல்லை)

(g) $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin\theta}{\cos^2\theta - \cos^2 3\theta} = -\frac{1}{16}$ (எல்லை)

[செ. ப. 1947 செ.]

(h) $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin\theta}{\cos^2\theta - 2\cos^2 3\theta} = -\frac{1}{34}$ (எல்லை)

12. (a) $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan\theta}{1 - \sqrt{2}\sin\theta} = 2$ (எல்லை)

(b) $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta - 2\tan\theta}{1 + \cos 4\theta} = \frac{1}{2}$ (எல்லை)

13. (a) $\lim_{\theta \to \alpha} \frac{\sin\theta - \sin\alpha}{\theta - \alpha} = \cos\alpha$ (எல்லை)

(b) $\lim_{\theta \to \alpha} \frac{\cos\theta - \cos\alpha}{\theta - \alpha} = -\sin\alpha$ (எல்லை)

(c) $\lim_{\theta \to \alpha} \frac{\sin\theta - \sin\alpha}{\cos\theta - \cos\alpha} = -\cot\alpha$ (எல்லை)

14. $\lim_{\theta \to 0} \frac{a - \theta\sin\theta - b\cos\theta}{\theta^4} = \frac{1}{12}$ (எல்லை) எனில்,

$a$, $b$-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

(செ. ப. 1941 செ.; 1948 மா.)

15. $\frac{1}{10}$ ஆரையனின் sine மதிப்பை 5 தசமத்தானங்களுக்குத் திருத்தமாகக் (correct to 5 decimal places) காண்க.

(செ. ப. 1967 செ.)

16. $x$ சிறியதெனில்,

$$\cos(\alpha + x) = \cos\alpha - x\sin\alpha - \frac{x^2}{2}\cos\alpha + \frac{x^3}{6}\sin\alpha$$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1947 செ.)

17. மேலேயுள்ள முடிவைப் பயன்படுத்தி $\cos 63°$-ன் மதிப்பை 3 தசமத்தானங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

(செ. ப. 1947 செ.)

18. $\theta$ சிறியது எனில், $\frac{1}{6}(8\sin\theta - \sin 2\theta)$ ஐ $\theta$ எனக் கொள்வதால் ஏற்படும் பிழை, ஏறத்தாழ, $\frac{\theta^5}{30}$ என நிறுவுக.

19. $\theta$ சிறியது எனில், $\frac{1}{3}\left(8\sin\frac{\theta}{2} - \sin\theta\right)$ ஐ $\theta$ எனக் கொள்வதால் ஏற்படும் பிழை, $\frac{\theta^5}{480}$ ஐ விடக் குறைவு என நிறுவுக.

(செ. ப. 1939 செ.)

20. $x$ சிறியது எனில், $x$க்கும், $\frac{3\sin 2x}{2(2+\cos 2x)}$-க்கும் உள்ள வேறுபாடு, ஏறத்தாழ, $\frac{4x^5}{45}$ என நிறுவுக.

21. $\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{1175}{1176}$ எனில், $\theta = \frac{1}{14}$ ஆரையன் (ஏறத்தாழ) என நிறுவுக.

22. $\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{5045}{5046}$ எனில், $\theta = 1°\,58'$ (ஏறத்தாழ) என நிறுவுக.

(செ. ப. 1953 மா.)

23. $\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{19493}{19494}$ எனில், $\theta = 1°$ (ஏறத்தாழ) என நிறுவுக.

24. $\cos\theta = \frac{1681}{1682}$ எனில், $\theta = \frac{1}{29}$ ஆரையன் (ஏறத்தாழ) என நிறுவுக.

25. $\cos\theta = \frac{2737}{2738}$ எனில், $\theta = \frac{1}{37}$ ஆரையன் (ஏறத்தாழ) என நிறுவுக.

26. $\cos\theta = \frac{99}{100}$ எனில், $\theta = 8°\ 6'$ (ஏறத்தாழ) என நிறுவுக.

27. $\cos\theta = \theta$ எனில், $\theta = 0{\cdot}73$ ஆரையன் (ஏறத்தாழ) என நிறுவுக.

28. $\frac{\tan\theta}{\theta} = 1{\cdot}000003$ எனில், $\theta = \frac{3}{1000}$ ஆரையன் (ஏறத்தாழ) என நிறுவுக.

29. $\frac{\tan\theta}{\theta} = \frac{2524}{2523}$ எனில், $\theta = 1°\ 58'$ (ஏறத்தாழ) என நிறுவுக.

30. $\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 0{\cdot}87$ என்ற சமன்பாட்டை வட்ட அளவையில் தோராயமாகத் தீர்க்க. (செ. ப. 1937 மா.)

31. $\sin\theta = 0{\cdot}51$ எனில், $\theta$-ன் தோராய மதிப்பைக் காண்க.

32. $\sin\theta = 0{\cdot}9998$ எனில், $\theta = 88°\ 51'$ (ஏறத்தாழ) என நிறுவுக.

33. $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = 0{\cdot}51$ எனில், $\theta = 0{\cdot}0115$ ஆரையன் (ஏறத்தாழ) என நிறுவுக.

34. $\theta = 0{\cdot}01$ ஆரையன் எனில், $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = 0{\cdot}49$ என நிறுவுக.

35. $\theta = 0{\cdot}005$ ஆரையன் எனில், $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

36. $\tan\theta = \frac{1}{10}$ எனில், $\theta$-ன் தோராய மதிப்பைக் காண்க.

37. $\tan\theta = \frac{1}{15}$ எனில், $\theta = 3°\ 49'$ (ஏறத்தாழ) என நிறுவுக.

38. $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = 1{\cdot}001$ என்ற சமன்பாட்டைத் தோராயமாகத் தீர்க்க.

39. $\tan\theta = 1{\cdot}0024$ எனில், $\theta$-ன் தோராய மதிப்பைக் காண்க.

40. $\theta$ மிகச் சிறியது. ABC என்ற முக்கோணத்தில், கோணம் $C$-ன் வட்ட அளவை (Circular measure) $\pi - \theta$ எனில்,
$c = (a+b)\left[1 - \dfrac{ab\,\theta^2}{2(a+b)^2}\right]$ (ஏறத்தாழ) என நிறுவுக.

41. $\alpha, \beta, \gamma$ மிகச் சிறியவை. R ஐச் சுற்றுவட்ட ஆரமாகக் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் அநேகமாகச் சமமானவை. அதன் பக்கங்கள் $a, b, c$ ; கோணங்கள் $\dfrac{\pi}{3} + \alpha$,
$\dfrac{\pi}{3} + \beta$, $\dfrac{\pi}{3} + \gamma$ எனில், $a\alpha + b\beta + c\gamma = R(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$
(ஏறத்தாழ) என நிறுவுக.

42. ஒரு சிறு வட்ட வில்லின் நாணின் நீளம் $c$, அதே வட்ட வில்லின் அரை பாகத்தின் நாணின் நீளம் $c'$ எனில், அந்த வில்லின் நீளம், தோராயமாக, $\frac{1}{3}(8c' - c)$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1940 மா.)

43. ஒரு வட்ட வில்லின் நாணின் நீளம் $l$, அதே வட்ட வில்லின் மூன்றில் இரு பாகத்தின் நாணின் நீளம் $l_1$, மூன்றில் ஒரு பாகத்தின் நாணின் நீளம் $l_2$ எனில், அந்த வில்லின் நீளம், தோராயமாக, $\dfrac{1}{10}(l - 9l_1 + 45l_2)$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1943 மா.; 1967 ஏ.)

44. உயரம் $h$ உள்ள ஒரு வட்டத் துண்டு (Segment), நீளம் $c$ உள்ள நாணின் மீது அமைந்தால், அந்த நாணின் நீளத்திற்கும் வில்லின் நீளத்திற்கும் உள்ள வேறுபாடு, தோராயமாக, $\dfrac{8h^2}{3c}$ என நிறுவுக $\left(\dfrac{h}{c}\text{ சிறியது}\right)$.

45. உயரம் $h$ உள்ள ஒரு வட்டத் துண்டு, நீளம் $d$ உள்ள நாணின் மீது அமைந்துள்ளது. அந்த நாண் $\theta$ என்ற கோணத்தை வட்ட மையத்தில் தாங்குகிறது. $\theta^4$ ஐத் தவிர்க்குமளவிற்கு $\theta$ சிறியதாக இருக்குமானால், அந்த வட்டத் துண்டின் பரப்பளவு, தோராயமாக, $\dfrac{2hd}{3}$ என நிறுவுக.

46. 100 பக்கங்களையுடைய ஓர் ஒழுங்குப் பலகோணம் (Regular Polygon) ஒரு வட்டத்தின் உள்ளே வரையப்பட்டுள்ளது

(inscribed in a circle) எனில், அப் பலகோணத்தின் பரப்பளவிற்கும், வட்டத்தின் பரப்பளவிற்கும் உள்ள வேறுபாடு, வட்டத்தின் பரப்பளவில் $\frac{1}{1500}$ பாகத்திற்கும் குறைவு என நிறுவுக.

(செ. ப. 1946 செ.)

47. 2000 பக்கங்களையுடைய ஓர் ஒழுங்குப் பலகோணம் ஆரம் 1 மைல் உள்ள ஒரு வட்டத்தின் உள்ளே வரையப்பட்டுள்ளது. அப் பலகோணத்தின் பரப்பளவிற்கும், வட்டத்தின் பரப்பள விற்கும் உள்ள வேறுபாடு, ஒரு பக்கம் 5 கஜம் உள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவை விடக் குறைவு என்று நிரூபிக்க.

(செ. ப. 1936 மா.)

48. ஒரு வட்டத்தினுள்ளே வரையப்பட்டுள்ள $n$ பக்கங்கள் கொண்ட ஓர் ஒழுங்குப் பலகோணத்தின் சுற்றளவு $p$ எனில், அவ் வட்டத்தின் பரிதிக்கும் பலகோணத்தின் சுற்றளவுக்கும் உள்ள வேறுபாடு, தோராயமாக, $\frac{\pi^2 p}{6n^2}$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1935 செ.)

49. ஒரு வட்டத்தைச் சுற்று வட்டமாகவும், உள் வட்ட மாகவும் கொண்ட $n$ பக்கங்களுள்ள இரண்டு ஒழுங்குப் பல கோணங்களின் பக்கங்களின் நீளங்கள் முறையே $l, m$ எனில், அவ் வட்டத்தின் பரிதியின் நீளம், தோராயமாக, $\frac{n}{3}(2l+m)$ என நிறுவுக. அவ்விரு பலகோணங்களின் பரப்பளவுகள் முறையே $A_1, A_2$ எனில், வட்டத்தின் பரப்பளவு, தோராயமாக, $\frac{A_1+2A_2}{3}$ என்று நிரூபிக்க.

50. $K \tan z$ சிறியது எனில், $\sin(z - K\tan z) = (1-K)\sin z$, தோராயமாக, என நிறுவுக.

51. $e$ மிகச் சிறியது, $\phi = \theta - 2e\sin\theta + \frac{3}{4}e^2\sin 2\theta$ எனில், $\theta = \phi + 2e\sin\phi + \frac{5}{4}e^2\sin 2\phi$, தோராயமாக, என நிறுவுக.

52. $\log\cos x$ ஐயும், $\log\frac{\sin x}{x}$ ஐயும் $x$-ன் ஏறு அடுக்குகளில் (Ascending Powers of $x$) 4 ஆம் அடுக்கு வரை விரித்தெழுதுக. அதே அடுக்கிற்கு,

$$\log\sin x = \log x - \frac{1}{45}\log\cos x + \frac{64}{45}\log\cos\frac{x}{2}$$ என்ற

சூத்திரம் உண்மையானது என்பதைச் சரி பார்க்க.

(செ. ப. 1947 மா.)

## விடைகள்

14. $a = b = 2$.

30. $x = 0{\cdot}008$ ஆரையன்.

31. $\theta = \left(\frac{\pi}{6} + 0{\cdot}012\right)$ ஆரையன்.

35. 0·8635

36. $\theta = 5^\circ 43'$

38. $\theta = 0{\cdot}0005$ ஆரையன்.

39. $\theta = \left(\frac{\pi}{4} + 0{\cdot}0012\right)$ ஆரையன்.

# 5. காரணிப்படுத்தல்

## [Factorisation]

### 5.1. முன்னுரை

$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots\dots\dots + a_{n-1} x + a_n$ என்ற $x$-ன் $n$ படிக் கோவையில் ($n$ th degree expression in $x$), $x = a$ என்று இடும்போது, $f(a) = 0$ எனில், நாம் இயற் கணிதத்தில் (Algebra) கற்றபடி, '$a$' என்பது $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு ஆகும்; $(x - a)$ என்பது '$a$'-க்கு ஒத்த $f(x)$-ன் காரணியாகும் [Corresponding factor of $f(x)$].

$f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $n$ தீர்வுகள் தாம் உண்டு. அவைகள் $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\dots\dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ எனில், $f(x) \equiv a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots\dots\dots (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n)$. அத்தீர்வுகளில் சிக்கல் எண்கள் இருந்தால், அவைகள் இணைச்சிக்கல் எண்களாகவே தோன்றுகின்றன. அதாவது, $\alpha + i\beta$ என்பது $f(x) = 0$-ன் ஒரு தீர்வு எனில், $\alpha - i\beta$ என்பதும் ஒரு தீர்வாகும். $x - (\alpha + i\beta)$, $x - (\alpha - i\beta)$ என்பவைகள் $\alpha \pm i\beta$ என்ற தீர்வுகளுக்கு ஒத்த $f(x)$-ன் காரணிகளாகும்.

இவ்விரண்டு காரணிகளின் பெருக்குத் தொகை

$$= (x - \alpha - i\beta)(x - \alpha + i\beta)$$
$$= (x - \alpha)^2 + \beta^2$$
$$= x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2)$$

இது $f(x)$-ன் ஒரு மெய்யான இருபடிக் காரணி (Real Quadratic Factor) ஆகும்.

$\alpha + i\beta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ எனில்,

$\alpha = r\cos\theta, \ \beta = r\sin\theta$. $\therefore \ \alpha^2 + \beta^2 = r^2$

எனவே, $x^2 - 2xr\cos\theta + r^2$ என்பது $f(x)$-ன் ஒரு மெய்யான இருபடிக் காரணியாகும்.

**5.2. $x^n - a^n$ ஐக் காரணிப்படுத்தல்**

$$x^n - a^n = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்த்து, நமக்குத் தேவையான காரணிகளை அடையலாம்.

(i)-லிருந்து, $x^n = a^n$

$= a^n\,[\cos 2r\pi + i\sin 2r\pi]$, $r$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

$$\therefore \quad x = a\left[\cos\frac{2r\pi}{n} + i\sin\frac{2r\pi}{n}\right],$$

$$r = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots, (n-1).$$

சமன்பாடு (i)-ன் இந்த $n$ தீர்வுகளையும் முறையே

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \alpha_{n-1}$ எனக் குறித்தால்,

$$x^n - a^n = (x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots\ldots(x-\alpha_{n-1}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

இப்பொழுது,

$$\alpha_1 = a\left[\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right]$$

$$\alpha_{n-1} = a\left[\cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\right]$$

$$= a\left[\cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

$$= a\left[\cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}\right]$$

எனவே, $\alpha_1$, $\alpha_{n-1}$ என்ற தீர்வுகள் இணைச் சிக்கல் எண்களாகும். இதேமாதிரியே, $\alpha_2$, $\alpha_{n-2}$ ; $\alpha_3$, $\alpha_{n-3}$ ; $\alpha_4$, $\alpha_{n-4}$ ; ...................... என்பவைகளும் இணைச் சிக்கல் எண்கள் என நிறுவலாம்.

**வகை 1.**

$n$ ஓர் இரட்டை எண் (Even Number)

அதாவது, $n = 2K$, K ஒரு நேர் முழு எண்.

$\therefore \quad \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_{K-1}, \alpha_K, \alpha_{K+1}, \ldots\ldots \alpha_{2K-1}$, என்பவை (i)-ன் தீர்வுகள்.

இவற்றுள், $\alpha_0 = a\,[\cos 0 + i \sin 0]$
$= a$ (ஒரு மெய் எண்)

$$\alpha_K = a\left[\cos\frac{2K\pi}{2K} + i\sin\frac{2K\pi}{2K}\right]$$
$$= a\,[\cos\pi + i\sin\pi]$$
$$= -a \text{ (ஒரு மெய் எண்)}$$

$\therefore$ $x - a$, $x + a$ என்பவை $\alpha_0$, $\alpha_K$-க்கு ஒத்த காரணிகள். மீதமுள்ள $2K - 2$ தீர்வுகளும் சிக்கல் எண்கள். அவைகள் $\alpha_1, \alpha_{2K-1}$ ; $\alpha_2, \alpha_{2K-2}$ ; ........; $\alpha_{K-1}$ $\alpha_{K+1}$ என்ற $(K-1)$ ஜோடி இணைச் சிக்கல் தீர்வுகளாகும்.

ஒவ்வொரு ஜோடிக்கும் ஒத்த மெய்யான இருபடிக் காரணி (Real Quadratic Factor) கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_{2K-1}) = x^2 - 2xa\cos\frac{2\pi}{2K} + a^2$$

$$(x - \alpha_2)(x - \alpha_{2K-2}) = x^2 - 2xa\cos\frac{4\pi}{2K} + a^2$$

.....................................................................................

.....................................................................................

$$(x - \alpha_{K-1})(x - \alpha_{K+1}) = x^2 - 2xa\cos\frac{2(K-1)\pi}{2K} + a^2$$

எனவே, (ii)-லிருந்து,

$$x^{2K} - a^{2K} = (x - a)(x + a)\prod_{r=1}^{K-1}\left[x^2 - 2xa\cos\frac{2r\pi}{2K} + a^2\right]$$

$$= (x^2 - a^2)\prod_{r=1}^{K-1}\left[x^2 - 2xa\cos\frac{2r\pi}{2K} + a^2\right] \quad (115)$$

$$\text{அ-து, } x^n - a^n = (x^2 - a^2)\prod_{r=1}^{\frac{n}{2}-1}\left[x^2 - 2xa\cos\frac{2r\pi}{n} + a^2\right] \quad (116)$$

**வகை 2.**

$n$ ஓர் ஒற்றை எண் (Odd Number).

அதாவது, $n = 2K + 1$, K ஒரு நேர் முழு எண் அல்லது பூச்சியம். எனவே, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_K, \alpha_{K+1}, \ldots\ldots, \alpha_{2K}$ என்பவை (i)-ன் தீர்வுகள்.

இவற்றுள், $\alpha_0 = a[\cos 0 + i \sin 0]$
$= a$ (ஒரு மெய் எண்)

$\therefore x - a$ என்பது $\alpha_0$ க்கு ஒத்த காரணியாகும். மீதமுள்ள 2 K தீர்வுகளும் சிக்கல் எண்கள். அவைகள் $\alpha_1, \alpha_{2K}$; $\alpha_2, \alpha_{2K-1}$;........; $\alpha_K, \alpha_{K+1}$ என்ற K ஜோடி இணைச் சிக்கல் தீர்வுகளாகும். ஒவ்வொரு ஜோடிக்கும் ஒத்த மெய்யான இரு படிக் காரணி கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_{2K}) = x^2 - 2x\,a \cos \frac{2\pi}{(2K+1)} + a^2$$

$$(x - \alpha_2)(x - \alpha_{2K-1}) = x^2 - 2x\,a \cos \frac{4\pi}{(2K+1)} + a^2$$

..............................................................................

..............................................................................

$$(x - \alpha_K)(x - \alpha_{K+1}) = x^2 - 2x\,a \cos \frac{2K\pi}{(2K+1)} + a^2$$

எனவே, (ii)-லிருந்து

$$x^{2K+1} - a^{2K+1} = (x - a) \prod_{r=1}^{K} \left[ x^2 - 2x\,a \cos \frac{2r\pi}{(2K+1)} + a^2 \right] \quad (117)$$

அ-து, $x^n - a^n =$

$$(x - a) \prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[ x^2 - 2x\,a \cos \frac{2r\pi}{n} + a^2 \right] \quad (118)$$

**துணை முடிவுகள் :**

1. $a = 1$, $n$ ஓர் இரட்டை எண் எனில்,

$$x^n - 1 = (x^2 - 1) \prod_{r-1}^{\frac{n}{2}-1} \left[ x^2 - 2x \cos \frac{2r\pi}{n} + 1 \right] \quad (119)$$

2. $a = 1$, $n$ ஓர் ஒற்றை எண் எனில்,

$$x^n - 1 = (x - 1) \prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[ x^2 - 2x \cos \frac{2r\pi}{n} + 1 \right] \quad (120)$$

**5.3.** $x^n + a^n$ **ஐக் காரணிப்படுத்தல்**

$$x^n + a^n = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(i)$$

என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்த்து நமக்குத் தேவையான காரணிகளை அடையலாம்.

(i)-லிருந்து, $x^n = -a^n$

$$= a^n [\cos (2r+1)\pi + i \sin (2r+1)\pi],$$

$r$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்

$$\therefore\ x = a\left[\cos\frac{(2r+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2r+1)\pi}{n}\right],$$

$$r = 0, 1, 2, \ldots\ldots, (n-1)$$

சமன்பாடு (i)-ன் இந்த $n$ தீர்வுகளையும் முறையே

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots, \alpha_{n-1}$ எனக் குறித்தால்,

$$x^n + a^n = (x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-1})\ldots(ii)$$

இப்பொழுது,

$$\alpha_0 = a\left[\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}\right]$$

$$\alpha_{n-1} = a\left[\cos\frac{2(n-1)+1}{n}.\pi + i\sin\frac{(2n-1)+1}{n}.\pi\right]$$

$$= a\left[\cos\frac{(2n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2n-1)\pi}{n}\right]$$

$$= a\left[\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{n}\right)\right]$$

$$= a\left[\cos\frac{\pi}{n} - i\sin\frac{\pi}{n}\right]$$

எனவே, $\alpha_0, \alpha_{n-1}$ என்பவை இணைச் சிக்கல் எண்கள். இதே மாதிரியே, $\alpha_1, \alpha_{n-2}$; $\alpha_2, \alpha_{n-3}$; $\alpha_3, \alpha_{n-4}$; …… என்பவைகளும் இணைச் சிக்கல் எண்கள் என நிறுவலாம்.

**வகை 1.**

$n$ ஓர் இரட்டை எண் (Even Number).

அதாவது $n = 2\text{K}$, K ஒரு நேர் முழு எண்.

$\therefore\ \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_{\text{K}-1}, \alpha_{\text{K}}, \ldots\ldots, \alpha_{2\text{K}-1}$ என்பவை (i)-ன் தீர்வுகள். இவைகள் $\alpha_0, \alpha_{2\text{K}-1}$; $\alpha_1, \alpha_{2\text{K}-2}$; ……; $\alpha_{\text{K}-1}, \alpha_{\text{K}}$ என்ற K ஜோடி இணைச் சிக்கல் தீர்வுகளாகும். ஒவ்வொரு ஜோடிக்கும் ஒத்த மெய்யான இருபடிக் காரணி கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

$$(x-\alpha_0)(x-\alpha_{2K-1}) = x^2 - 2xa\cos\frac{\pi}{2K} + a^2$$

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_{2K-2}) = x^2 - 2xa\cos\frac{3\pi}{2K} + a^2$$

: : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : :

$$(x-\alpha_{K-1})(x-\alpha_K) = x^2 - 2xa\cos\frac{(2K-1)\pi}{2K} + a^2$$

எனவே, (ii)-லிருந்து,

$$x^{2K} + a^{2K} = \prod_{r=0}^{K-1}\left[x^2 - 2xa\cos\frac{(2r+1)}{2K}\pi + a^2\right] \quad (121)$$

அ-து, $$x^n + a^n = \prod_{r=0}^{\frac{n}{2}-1}\left[x^2 - 2xa\cos\frac{(2r+1)\pi}{n} + a^2\right] \quad (122)$$

**வகை 2.**

$n$ ஓர் ஒற்றை எண் (Odd Number) அதாவது, $n = 2K + 1$, K ஒரு நேர் முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

எனவே, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{K-1}, \alpha_K, \alpha_{K+1}, \ldots\ldots, \alpha_{2K}$ என்பவை (i)-ன் தீர்வுகள்.

இவற்றுள்,

$$\alpha_K = a\left[\cos\frac{(2K+1)\pi}{(2K+1)} + i\sin\frac{(2K+1)\pi}{(2K+1)}\right]$$

$$= a[\cos\pi + i\sin\pi]$$

$$= -a \text{ (ஒரு மெய் எண்)}$$

∴ $x + a$ என்பது $\alpha_K$க்கு ஒத்த காரணியாகும். மீதமுள்ள 2K தீர்வுகளும் சிக்கல் எண்கள். அவைகள், $\alpha_0, \alpha_{2K}$; $\alpha_1, \alpha_{2K-1}$; $\alpha_2, \alpha_{2K-2}$; ........; $\alpha_{K-1}, \alpha_{K+1}$ என்ற K ஜோடி இணைச் சிக்கல் தீர்வுகளாகும். ஒவ்வொரு ஜோடிக்கும் ஒத்த மெய்யான இருபடிக் காரணி கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

$$(x-\alpha_0)(x-\alpha_{2K}) = x^2 - 2xa\cos\frac{\pi}{2K+1} + a^2$$

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_{2K-1}) = x^2 - 2xa\cos\frac{3\pi}{2K+1} + a^2$$

: : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : : :

$$(x - \alpha_{K-1})(x - \alpha_{K+1}) = x^2 - 2x\,a\cos\frac{(2K-1)\pi}{(2K+1)} + a^2$$

எனவே, (ii)-லிருந்து,

$x^{2K+1} + a^{2K+1} =$

$$(x + a) \prod_{r=0}^{K-1} \left[x^2 - 2x\,a\cos\frac{(2r+1)\pi}{(2K+1)} + a^2\right] \quad (123)$$

அ-து, $x^n + a^n =$

$$(x + a) \prod_{r=0}^{\frac{n-3}{2}} \left[x^2 - 2x\,a\cos\frac{(2r+1)\pi}{n} + a^2\right] \quad (124)$$

**துணை முடிவுகள் :**

1. $a = 1$, $n$ ஓர் இரட்டை எண் எனில்,

$$x^n + 1 = \prod_{r=0}^{\frac{n}{2}-1} \left[x^2 - 2x\cos\frac{(2r+1)\pi}{n} + 1\right] \quad (125)$$

2. $a = 1$, $n$ ஓர் ஒற்றை எண் எனில்,

$$x^n + 1 = (x + 1) \prod_{r=0}^{\frac{n-3}{2}} \left[x^2 - 2x\cos\frac{(2r+1)\pi}{n} + 1\right] \quad (126)$$

**5.4.** $x^{2n} - 2x^n a^n \cos n\theta + a^{2n}$ **ஐக் காரணிப் படுத்தல்**

$$x^{2n} - 2x^n a^n \cos n\theta + a^{2n} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்த்து, நமக்குத் தேவையான காரணிகளை அடையலாம்.

சமன்பாடு (i) ஆனது $x^n$-ல் ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு (Quadratic Equation in $x^n$) ஆகும்.

$$\therefore \quad x^n = \frac{2a^n \cos n\theta \pm \sqrt{4a^{2n}\cos^2 n\theta - 4a^{2n}}}{2}$$

$$= \frac{2a^n \cos n\theta \pm \sqrt{-4a^{2n}(1 - \cos^2 n\theta)}}{2}$$

$$= \frac{2a^n \cos n\theta \pm \sqrt{-4a^{2n}\sin^2 n\theta}}{2}$$

$$= \frac{2a^n \cos n\theta \pm i\, 2a^n \sin n\theta}{2}$$

$$= a^n (\cos n\theta \pm i \sin n\theta)$$

$$= a^n [\cos (2r\pi + n\theta) \pm i \sin (2r\pi + n\theta)],$$

$r$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

$$\therefore \quad x = a\left[\cos \frac{(2r\pi + n\theta)}{n} \pm i \sin \frac{(2r\pi + n\theta)}{n}\right]$$

$$= a\left[\cos\left(\theta + \frac{2r\pi}{n}\right) \pm i \sin\left(\theta + \frac{2r\pi}{n}\right)\right],$$

$$r = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots (n-1).$$

எனவே, $r$-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் சமன்பாடு (i)-க்கு இரண்டு தீர்வுகள் கிடைக்கின்றன. அவை இணைச் சிக்கல் எண்கள். அவற்றை $\alpha_r$, $\overline{\alpha_r}$ எனக் குறித்தால்,

$$\alpha_0, \overline{\alpha_0};\ \alpha_1, \overline{\alpha_1};\ \alpha_2, \overline{\alpha_2};\ \ldots\ldots\ldots\ldots;\ \alpha_{n-1}, \overline{\alpha_{n-1}}$$

என்பவை சமன்பாடு (i)-ன் $n$ ஜோடி இணைச் சிக்கல் தீர்வுகளாகும்.

$\alpha_r$, $\overline{\alpha_r}$-க்கு ஒத்த மெய்யான இருபடிக் காரணி

$$= (x - \alpha_r)(x - \overline{\alpha_r})$$

$$= x^2 - 2xa \cos\left(\theta + \frac{2r\pi}{n}\right) + a^2$$

$$\therefore \quad x^{2n} - 2x^n a^n \cos n\theta + a^{2n}$$

$$= \prod_{r=0}^{n-1}\left[x^2 - 2xa\cos\left(\theta + \frac{2r\pi}{n}\right) + a^2\right] \ldots\ldots \quad (127)$$

**துணை முடிவுகள் :**

1. சூத்திரம் (127) -ல் $a = 1$ என்று இட,

$$x^{2n} - 2x^n \cos n\theta + 1$$

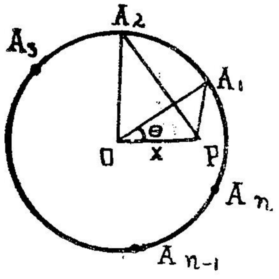
$$= \prod_{r=0}^{n-1}\left[x^2 - 2x\cos\left(\theta + \frac{2r\pi}{n}\right) + 1\right] \qquad (128)$$

2. சூத்திரம் (128)-ன் இடப்பக்கத்தை $x^n$ ஆலும், வலப் பக்கத்திலுள்ள ஒவ்வொரு காரணியையும் $x$ ஆலும் வகுக்க,

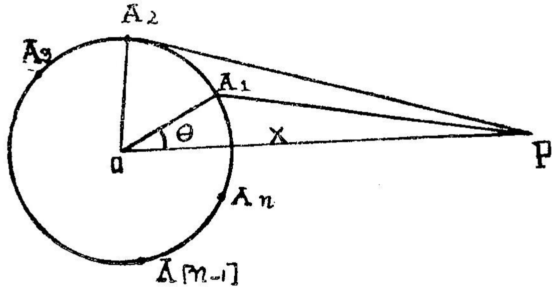
$$x^n + \frac{1}{x^n} - 2\cos n\theta$$

$$= \prod_{r=0}^{n-1}\left[x + \frac{1}{x} - 2\cos\left(\theta + \frac{2r\pi}{n}\right)\right] \qquad (129)$$

## 5.5. டிமாவியரின் வட்டப் பண்பு (De Moivre's Property of the Circle)




படம் 29




படம் 30

O ஐ மையமாகவும், '$a$' ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டத்தை வரை. OP $= x$ ஆக இருக்குமாறு P என்ற புள்ளியை எடு. $x \lessgtr a$ என்பதைப் பொறுத்து P ஆனது வட்டத்தினுள்ளே (படம் 29) அல்லது வட்டத்தின் வெளியே (படம் 30) அமையும். கோணம் $POA_1 = \theta$ ஆக இருக்குமாறு $A_1\,A_2\,A_3 \ldots\ldots A_n$ என்ற $n$ பக்கங்களுள்ள ஓர் ஒழுங்குப் பலகோணத்தை வட்டத்தினுள்ளே வரை (inscribe a regular polygon of n sides in the circle). இப்பொழுது,

$$\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \ldots\ldots\ldots = \angle A_{n-1}OA_n = \frac{2\pi}{n}$$

எனவே, $$\angle POA_2 = \theta + \frac{2\pi}{n}$$

$$\angle POA_3 = \theta + \frac{4\pi}{n}$$

...........................

...........................

$$\angle POA_n = \theta + \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

$\triangle POA_1$-ல், $PA_1^2 = OP^2 + OA_1^2 - 2OP.\ OA_1.$
$\cos POA_1$

$$= x^2 + a^2 - 2xa\cos\theta$$
$$= x^2 - 2xa\cos\theta + a^2$$

இதேபோல், $PA_2^2 = x^2 - 2xa\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right) + a^2$

$$PA_3^2 = x^2 - 2xa\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{n}\right) + a^2$$

..................................................

..................................................

$$PA_n^2 = x^2 - 2xa\cos\left\{\theta + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right\} + a^2$$

$\therefore\ PA_1^2 . PA_2^2 . \ldots\ldots . PA_n^2$

$$= \prod_{r=0}^{n-1}\left[x^2 - 2xa\cos\left(\theta + \frac{2r\pi}{n}\right) + a^2\right]$$

எனவே, சூத்திரம் (127)-ன் படி,

$$PA_1^2 . PA_2^2 . \ldots\ldots . PA_n^2 = x^{2n} - 2x^n a^n \cos n\theta + a^{2n} \qquad (130)$$

இம் முடிவிற்கு டிமாவியரின் வட்டப் பண்பு எனப் பெயர்.

## 5.6. கோட்சின் வட்டப் பண்புகள் (Cotes' Properties of the Circle)

5.5.-ல் P ஆனது $OA_1$-ன் மீது அமைந்தால், $\theta = 0$.
எனவே,

$$PA_1^2 . PA_2^2 . \ldots\ldots . PA_n^2 = x^{2n} - 2x^n a^n + a^{2n}$$
$$= (x^n \sim a^n)^2$$

$$\therefore\ PA_1 . PA_2 . \ldots\ldots . PA_n = x^n \sim a^n \qquad (131)$$

அதாவது, $PA_1 . PA_2 . \ldots\ldots . PA_n = x^n - a^n,\ x > a$ எனில்,
$= a^n - x^n,\ a > x$ எனில்,

5.5.-ல், OP ஆனது கோணம் $A_n OA_1$ ஐ இரு சமபாகங்களாகப் பிரித்தால், $\theta = \frac{\pi}{n}$

எனவே,

$$PA_1^2 . PA_2^2 \ldots\ldots\ldots . PA_n^2 = x^{2n} - 2x^n a^n \cos\pi + a^{2n}$$
$$= x^{2n} + 2x^n a^n + a^{2n}$$
$$= (x^n + a^n)^2$$

$$\therefore \quad PA_1 . PA_2 \ldots\ldots\ldots . PA_n = x^n + a^n \qquad (132)$$

சூத்திரங்கள் (131)-ம், (132)-ம் கோட்சின் வட்டப் பண்புகள்.

## மாதிரிக் கணக்குகள்

**மாதிரிக் கணக்கு 5-7.1.**

$$x^7 + 1 = (x+1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{7} + 1\right).$$
$$\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{7} + 1\right).\left(x^2 - 2x\cos\frac{5\pi}{7} + 1\right)$$

என நிறுவுக. இதன் வழியாக,

$$\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = 4\sin\frac{\pi}{14} . \sin\frac{3\pi}{14} . \sin\frac{5\pi}{14}$$

$= \frac{1}{2}$ என நிறுவுக. (செ. ப. 1952 செ.)

*n* ஓர் ஒற்றை எண் எனில்,

$$x^n + 1 = (x+1)\prod_{r=0}^{\frac{n-3}{2}}\left[x^2 - 2x\cos\frac{(2r+1)\pi}{n} + 1\right]$$

[சூத்திரம் (126)]

இங்கே, $n = 7$. $\quad \therefore \frac{n-3}{2} = 2$

$$\therefore \quad x^7 + 1 = (x+1)\prod_{r=0}^{2}\left[x^2 - 2x\cos\frac{(2r+1)\pi}{7} + 1\right]$$

$$= (x+1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{7} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{7} + 1\right)$$
$$\left(x^2 - 2x\cos\frac{5\pi}{7} + 1\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

$$\therefore \frac{x^7+1}{x+1} = \left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{7} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{7} + 1\right)$$
$$\left(x^2 - 2x\cos\frac{5\pi}{7} + 1\right)$$

அதாவது, $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

$$= \left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{7} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{7} + 1\right)$$

$$\left(x^2 - 2x\cos\frac{5\pi}{7} + 1\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

(ii)-ன் இரண்டு பக்கங்களிலுமுள்ள $x$-ன் குணகங்களைச் சமப்படுத்த,

$$-1 = -2\left[\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\right]$$

$$\therefore \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(iii)}$$

(i)-ல் $x = 1$ என்று இட,

$$2 = 2\left(2 - 2\cos\frac{\pi}{7}\right)\left(2 - 2\cos\frac{3\pi}{7}\right)\left(2 - 2\cos\frac{5\pi}{7}\right)$$

அ - து, $1 = 8\left(1 - \cos\frac{\pi}{7}\right)\left(1 - \cos\frac{3\pi}{7}\right)$

$$\left(1 - \cos\frac{5\pi}{7}\right)$$

அ - து, $1 = 64\sin^2\frac{\pi}{14} \cdot \sin^2\frac{3\pi}{14} \cdot \sin^2\frac{5\pi}{14}$

$$\therefore 1 = \pm 8\sin\frac{\pi}{14} \cdot \sin\frac{3\pi}{14} \cdot \sin\frac{5\pi}{14} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(iv)}$$

$\frac{\pi}{14}, \frac{3\pi}{14}, \frac{5\pi}{14}$ ஆகிய மூன்றும் குறுங்கோணங்கள்.

எனவே, $\sin\frac{\pi}{14}, \sin\frac{3\pi}{14}, \sin\frac{5\pi}{14}$ என்ற மூன்றும் நேர் எண்கள் (Positive Numbers). ஆகவே, (iv)-ன் வலப் பக்கத்தில் நேர் குறியே (Positive Sign) ஏற்கத் தக்கது.

$$\therefore 1 = 8\sin\frac{\pi}{14} \cdot \sin\frac{3\pi}{14} \cdot \sin\frac{5\pi}{14}$$

$$\therefore 4\sin\frac{\pi}{14}, \sin\frac{3\pi}{14} \cdot \sin\frac{5\pi}{14} = \frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots \quad \text{(v)}$$

எனவே, (iii), (v)-லிருந்து

$$\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = 4\sin\frac{\pi}{14} \cdot \sin\frac{3\pi}{14}$$

$$\sin\frac{5\pi}{14} = \frac{1}{2}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 5-7.2.**

$x^6 + 8x^3 + 64$-ன் மெய்யான இருபடிக் காரணிகளைக் காண்க.

(செ. ப. 1948 செ.)

$$x^{2n} - 2x^n a^n \cos n\theta + a^{2n}$$

$$= \prod_{r=0}^{n-1} \left[ x^2 - 2x\,a \cos\left(\theta + \frac{2r\pi}{n}\right) + a^2 \right]$$ என்பது நமக்குத் தெரியும்.

இப்பொழுது,

$$x^6 + 8x^3 + 64$$

$$= x^6 + 8x^3 + 2^6$$

$$= x^{2\cdot3} + 2.\,x^3.\,2^3.\,\frac{1}{2} + 2^{2\cdot3}$$

$$= x^{2\cdot3} - 2x^3.\,2^3 \left(-\frac{1}{2}\right) + 2^{2\cdot3}$$

$$= x^{2\cdot3} - 2x^3.\,2^3 \cos\frac{2\pi}{3} + 2^{2\cdot3}$$

$$= x^{2\cdot3} - 2x^3.\,2^3 \cos 3.\,\frac{2\pi}{9} + 2^{2\cdot3}$$

$$\therefore n = 3,\ a = 2,\ \theta = \frac{2\pi}{9}$$

எனவே,

$$x^6 + 8x^3 + 64 = \prod_{r=0}^{2} \left[ x^2 - 2x.\,2\cos\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2r\pi}{3}\right) + 2^2 \right]$$

$$= \prod_{r=0}^{2} \left[ x^2 - 4x\cos\frac{(3r+1)}{9}2\pi + 4 \right]$$

**மாதிரிக் கணக்கு 5-7.3.**

$$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = 2^{n-1} \prod_{r=1}^{n-1} \left[ \cos\theta - \cos\frac{r\pi}{n} \right]$$ என நிறுவுக.

$$x^{2K} - a^{2K} = (x^2 - a^2) \prod_{r=1}^{K-1} \left[ x^2 - 2x\,a\cos\frac{2r\pi}{2K} + a^2 \right]$$

[சூத்திரம் (115)

இதில் $a = 1, K = n$ என்று இட,

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1) \prod_{r=1}^{n-1} \left[x^2 - 2x \cos \frac{2r\pi}{2n} + 1\right] \ldots\ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

(i)-ன் இடப்பக்கத்தை $x^n$ ஆலும், வலப்பக்கத்திலுள்ள ஒவ்வொரு காரணியையும் $x$ ஆலும் வகுக்க,

$$x^n - \frac{1}{x^n} = \left(x - \frac{1}{x}\right) \prod_{r=1}^{n-1} \left[x + \frac{1}{x} - 2\cos\frac{r\pi}{n}\right] \ldots\ldots \quad \text{(ii)}$$

$x = \cos\theta + i\sin\theta$, $s$ ஒரு நேர் முழு எண் எனில்,

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta$$

$$x^s - \frac{1}{x^s} = 2i \sin s\theta.$$

இம்மதிப்புகளை (ii)-ல் இட,

$$2i \sin n\theta = 2i \sin\theta \prod_{r=1}^{n-1} \left[2\cos\theta - 2\cos\frac{r\pi}{n}\right]$$

அ-து, $$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = \prod_{r=1}^{n-1} \left[2\cos\theta - 2\cos\frac{r\pi}{n}\right]$$

$$= 2^{n-1} \prod_{r=1}^{n-1} \left[\cos\theta - \cos\frac{r\pi}{n}\right] \quad \textbf{(133)}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 5-7.4.**

$\cos n\theta = 2^{n-1} = \prod_{r=0}^{n-1} \left[\cos\theta - \cos\frac{(2r+1)\pi}{2n}\right]$ என நிறுவுக.

$$x^{2K} + a^{2K} = \prod_{r=0}^{K-1} \left[x^2 - 2xa\cos\frac{(2r+1)\pi}{2K} + a^2\right]$$

**[சூத்திரம் (121)]**

இதில் $a = 1, K = n$ என்று இட

$$x^{2n} + 1 = \prod_{r=0}^{n-1} \left[x^2 - 2x\cos\frac{(2r+1)\pi}{2n} + 1\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(i)}$$

(i)-ன் இடப்பக்கத்தை $x^n$ ஆலும், வலப்பக்கத்திலுள்ள ஒவ்வொரு காரணியையும் $x$ ஆலும் வகுக்க.

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \prod_{r=0}^{n-1}\left[ x + \frac{1}{x} - 2\cos\frac{(2r+1)\pi}{2n}\right] \text{.........} \quad \text{(ii)}$$

$x = \cos\theta + i\sin\theta$ எனில்,

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta, \quad x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\theta$$

இம் மதிப்புகளை (ii)-ல் இட,

$$2\cos n\theta = \prod_{r=0}^{n-1}\left[ 2\cos\theta - 2\cos\frac{(2r+1)\pi}{2n}\right]$$

$$= 2^n \prod_{r=0}^{n-1}\left[ \cos\theta - \cos\frac{(2r+1)\pi}{2n}\right]$$

$$\therefore \cos n\theta = 2^{n-1}\prod_{r=0}^{n-1}\left[ \cos\theta - \cos\frac{(2r+1)\pi}{2n}\right] \quad (134)$$

**மாதிரிக் கணக்கு 5-7.5.**

$n$ ஒரு நேர் முழு எண் எனில்,

$$\sin\frac{\pi}{2n} \cdot \sin\frac{2\pi}{2n} \cdot \sin\frac{3\pi}{2n} \text{...........} \sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

**என நிறுவுக.**

(செ. ப. 1953 செ.)

$$x^{2K} - a^{2K} = (x^2 - a^2)\prod_{r=1}^{K-1}\left[x^2 - 2xa\cos\frac{2r\pi}{2K} + a^2\right]$$

[சூத்திரம் (115)]

இதில் $a = 1$, $K = n$ என்று இட,

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1)\prod_{r=1}^{n-1}\left[x^2 - 2x\cos\frac{2r\pi}{2n} + 1\right]$$

$$\therefore \frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1} = \prod_{r=1}^{n-1}\left[x^2 - 2x\cos\frac{r\pi}{n} + 1\right]$$

அதாவது,

$$x^{2(n-1)} + x^{2(n-2)} + \ldots\ldots + x^4 + x^2 + 1$$

$$= \prod_{r=1}^{n-1} \left[ x^2 - 2x \cos \frac{r\pi}{n} + 1 \right]$$

$x = 1$ என்று இட,

$$n = \prod_{r=1}^{n-1} \left[ 2 - 2 \cos \frac{r\pi}{n} \right]$$

$$= \prod_{r=1}^{n-1} 2 \left( 1 - \cos \frac{r\pi}{n} \right)$$

$$= \prod_{r=1}^{n-1} 2^2 \sin^2 \frac{r\pi}{2n}$$

$$= 2^{2(n-1)} \prod_{r=1}^{n-1} \left( \sin^2 \frac{r\pi}{2n} \right)$$

$$\therefore \quad \frac{n}{2^{2(n-1)}} = \prod_{r=1}^{n-1} \left( \sin^2 \frac{r\pi}{2n} \right)$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} = \pm \prod_{r=1}^{n-1} \left( \sin \frac{r\pi}{2n} \right)$$

$$= \pm \sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sin \frac{2\pi}{2n} \cdot \sin \frac{3\pi}{2n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \sin \frac{(n-1)\pi}{2n}$$

ஆனால், $\frac{\pi}{2n}, \frac{2\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{(n-1)\pi}{2n}$ என்ற கோணங்களில், ஒவ்வொன்றும் $\frac{\pi}{2}$-க்குக் குறைவு; எனவே, அவைகளின் சைன்கள் (sines) எல்லாம் நேர் எண்கள். ஆகவே வலப் பக்கத்தில் நேர் குறியே (Positive Sign) ஏற்கத் தக்கது.

$$\therefore \quad \sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sin \frac{2\pi}{2n} \cdot \sin \frac{3\pi}{2n} \ldots\ldots \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 5-7.6.**

$n$ ஒரு நேர் முழு எண் எனில்,

$$\cos\frac{\pi}{2n}\cdot\cos\frac{2\pi}{2n}\cdot\cos\frac{3\pi}{2n}\;\ldots\ldots\;\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

**என நிறுவுக.**

$$x^{2K}-a^{2K}=(x^2-a^2)\prod_{r=1}^{K-1}\left[x^2-2xa\cos\frac{2r\pi}{2K}+a^2\right]$$

[சூத்திரம் (115)]

இதில் $a=1, K=n$ என்று இட,

$$x^{2n}-1=(x^2-1)\prod_{r=1}^{n-1}\left[x^2-2x\cos\frac{2r\pi}{2n}+1\right]$$

$$\therefore\quad\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}=\prod_{r=1}^{n-1}\left[x^2-2x\cos\frac{r\pi}{n}+1\right]$$

அதாவது,

$$x^{2(n-1)}+x^{2(n-2)}+\ldots\ldots+x^4+x^2+1$$

$$=\prod_{r=1}^{n-1}\left[x^2-2x\cos\frac{r\pi}{n}+1\right]$$

$x=-1$ என்று இட,

$$n=\prod_{r=1}^{n-1}\left[2+2\cos\frac{r\pi}{n}\right]$$

$$=\prod_{r=1}^{n-1}2\left(1+\cos\frac{r\pi}{n}\right)$$

$$=\prod_{r=1}^{n-1}2^2\cos^2\frac{r\pi}{2n}$$

$$=2^{2(n-1)}\prod_{r=1}^{n-1}\left(\cos^2\frac{r\pi}{2n}\right)$$

$$\therefore\quad\frac{n}{2^{2(n-1)}}=\prod_{r=1}^{n-1}\left(\cos^2\frac{r\pi}{2n}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} = \pm \prod_{r=1}^{n-1} \left( \cos \frac{r\pi}{2n} \right)$$

$$= \pm \cos \frac{\pi}{2n} \cdot \cos \frac{2\pi}{2n} \cdot \cos \frac{3\pi}{2n} \cdots\cdots\cdots \cos \frac{(n-1)\pi}{2n}$$

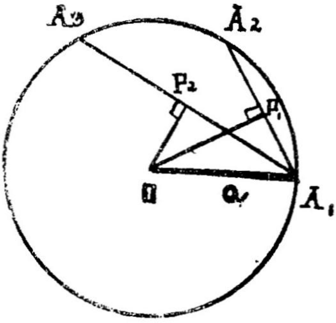
ஆனால், $\frac{\pi}{2n}, \frac{2\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \dots\dots\dots, \frac{(n-1)\pi}{2n}$ என்ற கோணங்களில் ஒவ்வொன்றும் $\frac{\pi}{2}$-க்குக் குறைவு; எனவே, அவைகளின் கொசைன்கள் (cosines) எல்லாம் நேர் எண்கள். ஆகவே, வலப் பக்கத்தில் நேர் குறியே (Positive Sign) ஏற்கத்தக்கது.

$$\therefore \cos \frac{\pi}{2n} \cdot \cos \frac{2\pi}{2n} \cdot \cos \frac{3\pi}{2n} \dots\dots\dots, \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 5-7.7.**

**$A_1, A_2, A_3 \dots\dots\dots A_{2m}$ என்ற $2m$ பக்கங்களுள்ள ஓர் ஒழுங்குப் பலகோணம் (Regular Polygon), '$a$' ஐ ஆரமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தினுள்ளே வரையப்பட்டுள்ளது. வட்டத்தின் மையம் O -லிருந்து $A_1A_2$, $A_1A_3$, $A_1 A_4$, ........., $A_1A_m$ என்ற பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகளின் நீளங்களின் பெருக்குத் தொகை $\left(\frac{1}{2}a\right)^{m-1}\sqrt{m}$ என நிறுவுக.**

(ஆந்திரா பல்கலைக் கழகம், 1940)




படம் 31

கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒழுங்குப் பலகோணத்திற்கு $2m$ பக்கங்கள் உள்ளன, எனவே,

$$\angle A_1 O A_2 = \angle A_2 O A_3 = \ldots\ldots\ldots = \angle A_{2m} O A_1 = \frac{2\pi}{2m} = \frac{\pi}{m}$$

$$\therefore \quad \angle A_1 O A_3 = \frac{2\pi}{m}$$

$$\angle A_4 O A_4 = \frac{3\pi}{m}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\angle A_1 O A_m = \frac{(m-1)\pi}{m}$$

$OP_1$, $OP_2$, ......, $OP_{m-1}$ என்பவைகளை முறையே $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, ......, $A_1 A_m$ என்ற பக்கங்களுக்குச் செங்குத்தாக இருக்கும்படி வரை (படம் 31).

இப்பொழுது,

$$\angle A_1 O P_1 = \frac{1}{2} \angle A_1 O A_2 = \frac{\pi}{2m}$$

$$\angle A_1 O P_2 = \frac{1}{2} \angle A_1 O A_3 = \frac{2\pi}{2m}$$

$$\angle A_1 O P_3 = \frac{1}{2} \angle A_1 O A_4 = \frac{3\pi}{2m}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\angle A_1 O P_{m-1} = \frac{1}{2} \angle A_1 O A_m = \frac{(m-1)\pi}{2m}$$

$$\therefore \quad OP_1 = a \cos \frac{\pi}{2m}$$

$$OP_2 = a \cos \frac{2\pi}{2m}$$

$$OP_3 = a \cos \frac{3\pi}{2m}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$OP_{m-1} = a \cos \frac{(m-1)\pi}{2m}$$

$$\therefore \quad OP_1 . OP_2 . OP_3 \ldots . OP_{m-1} = a^{m-1} . \cos\frac{\pi}{2m} . \cos\frac{2\pi}{2m} . \cos\frac{3\pi}{2m} . \ldots \cos\frac{(m-1)\pi}{2m}$$

$$= a^{m-1}\frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$$

[மாதிரிக் கணக்கு 5-7.6 ஐப் பார்க்க]

$$= \left(\frac{1}{2}a\right)^{m-1}\sqrt{m}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 5-7.8.**

***n* ஆனது 2 ஐ விடப் பெரிய இரட்டை எண் எனில்,**

$$2^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{\pi}{n} . \sin\frac{2\pi}{n} \ldots\ldots\ldots . \sin\frac{(n-2)\pi}{2n} = \sqrt{n}$$

**என நிறுவுக.**

*n* ஓர் இரட்டை எண்.

$$\therefore \quad x^n - 1 = (x^2 - 1)\prod_{r=1}^{\frac{n}{2}-1}\left[x^2 - 2x\cos\frac{2r\pi}{n} + 1\right]$$

[சூத்திரம் (119)]

$$\therefore \quad \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}\prod_{r=1}^{\frac{n}{2}-1}\left[x^2 - 2x\cos\frac{2r\pi}{n} + 1\right]$$

$$\therefore \quad \underset{x \to 1}{\text{எல்லை}}\ \frac{x^n - 1}{x - 1} = \underset{x \to 1}{\text{எல்லை}}\ \frac{x^2 - 1}{x - 1} .$$

$$\underset{x \to 1}{\text{எல்லை}}\ \prod_{r=1}^{\frac{n}{2}-1}\left[x^2 - 2x\cos\frac{2r\pi}{n} + 1\right]$$

$$\therefore \quad n = 2 . \prod_{r=1}^{\frac{n}{2}-1}\left[2 - 2\cos\frac{2r\pi}{n}\right]$$

$$= 2.\prod_{r=1}^{\frac{n}{2}-1}\left[2\left(1-\cos\frac{2r\pi}{n}\right)\right]$$

$$= 2.\prod_{r=1}^{\frac{n}{2}-1}\left[2^2\sin^2\frac{r\pi}{n}\right]$$

$$= 2.\,(2^2)^{\frac{n}{2}-1}\prod_{r=1}^{\frac{n}{2}-1}\sin^2\frac{r\pi}{n}$$

$$= 2.\;2^{n-2}\prod_{r=1}^{\frac{n}{2}-1}\sin^2\frac{r\pi}{n}$$

$$= 2^{n-1}\prod_{r=1}^{\frac{n}{2}-1}\sin^2\frac{r\pi}{n}$$

$$\therefore\quad \sqrt{n} = \pm\, 2^{\frac{n-1}{2}}\prod_{r=1}^{\frac{n}{2}-1}\sin\frac{r\pi}{n}$$

$$= \pm\, 2^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{\pi}{n}.\ \sin\frac{2\pi}{n}.\ \sin\frac{3\pi}{n}\ \ldots\ldots\ldots \sin\frac{(n-2)\pi}{2n}$$

இதில் சம்பந்தப்பட்டுள்ள கோணங்களில் ஒவ்வொன்றும் $\frac{\pi}{2}$-க்குக் குறைவு ; ஆகவே, அவைகளின் சைன்கள் (Sines) எல்லாம் நேர் எண்கள். எனவே, வலப் பக்கத்தில் நேர் குறியே (Positive sign) ஏற்கத் தக்கது.

$$\therefore\quad 2^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{\pi}{n}\ .\ \sin\frac{2\pi}{n}\ .\ \sin\frac{3\pi}{n}\ \ldots\ldots\ldots \sin\frac{(n-2)\pi}{2n} = \sqrt{n}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 5-7.9.**

$n$ ஓர் ஒற்றை எண் எனில்,

$$2^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \ldots \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \sqrt{n}$$ என

நிறுவுக.

$n$ ஓர் ஒற்றை எண்.

$$\therefore \quad x^n - 1 = (x-1) \prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[ x^2 - 2x\cos\frac{2r\pi}{n} + 1 \right]$$

[ சூத்திரம் (120) ]

$$\text{அ-து,} \quad \frac{x^n - 1}{x-1} = \prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[ x^2 - 2x\cos\frac{2r\pi}{n} + 1 \right]$$

$$\therefore \quad \underset{x \to 1}{\text{எல்லை}} \frac{x^n - 1}{x-1} = \underset{x \to 1}{\text{எல்லை}} \prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[ x^2 - 2x\cos\frac{2r\pi}{n} + 1 \right]$$

$$\therefore \quad n = \prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[ 2 - 2\cos\frac{2r\pi}{n} \right]$$

$$= \prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} 2\left(1 - \cos\frac{2r\pi}{n}\right)$$

$$= \prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^2 \sin^2\frac{r\pi}{n}$$

$$= (2^2)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \sin^2\frac{r\pi}{n}$$

$$= 2^{n-1} \prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \sin^2 \frac{r\pi}{n}$$

$$\therefore \quad \sqrt{n} = \pm\, 2^{\frac{n-1}{2}} \prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \sin \frac{r\pi}{n}$$

$$= \pm\, 2^{\frac{n-1}{2}} \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \cdot \sin \frac{3\pi}{n} \;\ldots\ldots\ldots \sin \frac{(n-1)\pi}{2n}$$

இதில் சம்பந்தப்பட்டுள்ள கோணங்களில் ஒவ்வொரு கோணமும் $\frac{\pi}{2}$ -க்குக் குறைவு ; ஆகவே, அவைகளின் சைன்கள் (Sines) எல்லாம் நேர் எண்கள். எனவே, வலப் பக்கத்தில் நேர் குறியே (Positive Sign) ஏற்கத்தக்கது.

$$\therefore \quad 2^{\frac{n-1}{2}} \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \cdot \sin \frac{3\pi}{n} \;\ldots\ldots\ldots \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} = \sqrt{n}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 5-7.10.**

***n* ஓர் இரட்டை எண் எனில்,**

$$2^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{\pi}{n} \cdot \cos \frac{2\pi}{n} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; \cos \frac{(n-2)\pi}{2n} = \sqrt{n}$$

**என நிறுவுக.**

*n* ஓர் இரட்டை எண்.

$$\therefore \quad x^n - 1 = (x^2 - 1) \prod_{r=1}^{\frac{n}{2}-1} \left[ x^2 - 2x \cos \frac{2r\pi}{n} + 1 \right]$$

[ சூத்திரம் (119) ]

$$\therefore \quad \frac{x^n - 1}{x^2 - 1} = \prod_{r=1}^{\frac{n}{2}-1} \left[ x^2 - 2x \cos \frac{2r\pi}{n} + 1 \right]$$

அதாவது, $x^{n-2} + x^{n-4} + \dots\dots\dots + x^2 + 1$

$$= \prod_{r=1}^{\frac{n}{2}-1} \left[ x^2 - 2x\cos\frac{2r\pi}{n} + 1 \right]$$

$x = -1$ என்று இட,

$$\frac{n}{2} = \prod_{r=1}^{\frac{n}{2}-1} \left[ 2 + 2\cos\frac{2r\pi}{n} \right]$$

$$= \prod_{r=1}^{\frac{n}{2}-1} 2\left(1 + \cos\frac{2r\pi}{n}\right)$$

$$= \prod_{r=1}^{\frac{n}{2}-1} 2^2\cos^2\frac{r\pi}{n}$$

$$= (2^2)^{\frac{n}{2}-1} \prod_{r=1}^{\frac{n}{2}-1} \cos^2\frac{r\pi}{n}$$

$$= 2^{n-2} \prod_{r=1}^{\frac{n}{2}-1} \cos^2\frac{r\pi}{n}$$

$$\therefore\ n = 2^{n-1} \prod_{r=1}^{\frac{n}{2}-1} \cos^2\frac{r\pi}{n}$$

$$\therefore\ \sqrt{n} = \pm 2^{\frac{n-1}{2}} \prod_{r=1}^{\frac{n}{2}-1} \cos\frac{r\pi}{n}$$

$$= \pm 2^{\frac{n-1}{2}} \cos\frac{\pi}{n}.\ \cos\frac{2\pi}{n}.\ \cos\frac{3\pi}{n} \dots\dots\dots \cos\frac{(n-2)\pi}{2n}$$

இதில் சம்பந்தப்பட்டுள்ள கோணங்களில் ஒவ்வொரு கோணமும் $\frac{\pi}{2}$-க்குக் குறைவு; ஆகவே, அவைகளின் கொசைன்கள் (cosines) எல்லாம் நேர் எண்கள். எனவே, வலப் பக்கத்தில் நேர் குறியே ஏற்கத் தக்கது.

$$\therefore\ 2^{\frac{n-1}{2}} \cos\frac{\pi}{n} \cdot \cos\frac{2\pi}{n} \cdot \cos\frac{3\pi}{n} \ldots\ldots\ldots \cos\frac{(n-2)\pi}{2n} = \sqrt{n}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 5-7.11.**

*n* **ஓர் ஒற்றை எண் எனில்,**

$$2^{\frac{n-1}{2}} \cdot \cos\frac{\pi}{2n} \cdot \cos\frac{3\pi}{2n} \cdot \ldots\ldots\ldots \cos\frac{(n-2)\pi}{2n} = \sqrt{n}$$

**என நிறுவுக.**

*n* ஓர் ஒற்றை எண்.

$$\therefore\ x^n + 1 = (x+1) \prod_{r=0}^{\frac{n-3}{2}} \left[ x^2 - 2x\cos\frac{(2r+1)\pi}{n} + 1 \right]$$

[சூத்திரம் (126)]

$$\therefore\ \frac{x^n+1}{x+1} = \prod_{r=0}^{\frac{n-3}{2}} \left[ x^2 - 2x\cos\frac{(2r+1)\pi}{n} + 1 \right]$$

அ-து, $$\frac{x^n-(-1)^n}{x-(-1)} = \prod_{r=0}^{\frac{n-3}{2}} \left[ x^2 - 2x\cos\frac{(2r+1)\pi}{n} + 1 \right]$$

$$\therefore\ \underset{x\to(-1)}{\text{எல்லை}} \frac{x^n-(-1)^n}{x-(-1)} =$$

$$\underset{x\to(-1)}{\text{எல்லை}} \prod_{r=0}^{\frac{n-3}{2}} \left[ x^2 - 2x\cos\frac{(2r+1)\pi}{n} + 1 \right]$$

$$\therefore \quad n(-1)^{n-1} = \prod_{r=0}^{\frac{n-3}{2}} \left[ 2 + 2\cos\frac{(2r+1)\pi}{n} \right]$$

$$\text{அ-து,} \quad n = \prod_{r=0}^{\frac{n-3}{2}} 2\left[ 1 + \cos\frac{(2r+1)\pi}{n} \right]$$

$$= \prod_{r=0}^{\frac{n-3}{2}} 2^2 \cos^2\frac{(2r+1)\pi}{2n}$$

$$= (2^2)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{r=0}^{\frac{n-3}{2}} \cos^2\frac{(2r+1)\pi}{2n}$$

$$= 2^{n-1} \prod_{r=0}^{\frac{n-3}{2}} \cos^2\frac{(2r+1)\pi}{2n}$$

$$\therefore \quad \sqrt{n} = \pm 2^{\frac{n-1}{2}} \prod_{r=0}^{\frac{n-3}{2}} \cos\frac{(2r+1)\pi}{2n}$$

$$= \pm 2^{\frac{n-1}{2}} \cos\frac{\pi}{2n} \cdot \cos\frac{3\pi}{2n} \ldots\ldots\ldots \cos\frac{(n-2)\pi}{2n}$$

இதில் சம்பந்தப்பட்டுள்ள கோணங்களில் ஒவ்வொரு கோணமும் $\frac{\pi}{2}$ -க்குக் குறைவு; ஆகவே, அவைகளின் கொசைன்கள் (cosines) எல்லாம் நேர் எண்கள். எனவே, வலப் பக்கத்தில் நேர் குறியே (Positive Sign) ஏற்கத் தக்கது.

$$\therefore \quad 2^{\frac{n-1}{2}} \cos\frac{\pi}{2n} \cdot \cos\frac{3\pi}{2n} \ldots\ldots\ldots \cos\frac{(n-2)\pi}{2n} = \sqrt{n}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 5-7.12.**

$\cos n\theta - \cos n\phi$ ஐ $n$ காரணிகளின் பெருக்குத் தொகையாக எழுதுக. அதன் மூலம் $\sin^2 n\beta = 2^{2n-2} \prod_{K=0}^{n-1} \sin^2\left(\beta + \frac{K\pi}{n}\right)$ என நிறுவுக. (ம. ப. 1970 ஏ.)

$$x^n + \frac{1}{x^n} - 2\cos n\phi$$

$$= \prod_{K=0}^{n-1}\left[x + \frac{1}{x} - 2\cos\left(\phi + \frac{2K\pi}{n}\right)\right] \ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

என்பது நமக்குத் தெரியும்.

$x = \cos\theta + i\sin\theta$ எனில்,

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta,\ x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\theta.$$

இம் மதிப்புகளை (i)-ல் இட

$$2\cos n\theta - 2\cos n\phi = \prod_{K=0}^{n-1}\left[2\cos\theta - 2\cos\left(\phi + \frac{2K\pi}{n}\right)\right]$$

அ-து, $2\left[\cos n\theta - \cos n\phi\right]$

$$= 2^n \prod_{K=0}^{n-1}\left[\cos\theta - \cos\left(\phi + \frac{2K\pi}{n}\right)\right]$$

$$\therefore\ \cos n\theta - \cos n\phi = 2^{n-1}\prod_{K=0}^{n-1}\left[\cos\theta - \cos\left(\phi + \frac{2K\pi}{n}\right)\right] \quad (135)$$

$\theta = 0,\ \phi = 2\beta$ என்று இட,

$$1 - \cos 2n\beta = 2^{n-1}\prod_{K=0}^{n-1}\left[1 - \cos\left(2\beta + \frac{2K\pi}{n}\right)\right]$$

அ-து, $2\sin^2 n\beta = 2^{n-1}\prod_{K=0}^{n-1} 2\sin^2\left(\beta + \frac{K\pi}{n}\right)$

$$= 2^{n-1} \cdot 2^n \prod_{K=0}^{n-1} \sin^2\left(\beta + \frac{K\pi}{n}\right)$$

$$\therefore \quad \sin^2 n\beta = 2^{n-1} \cdot 2^{n-1} \prod_{K=0}^{n-1} \sin^2\left(\beta + \frac{K\pi}{n}\right)$$

$$= 2^{2n-2} \prod_{K=0}^{n-1} \sin^2\left(\beta + \frac{K\pi}{n}\right)$$

**மாதிரிக் கணக்கு 5-7.13.**

$$\sin n\theta = 2^{n-1} \sin\theta \cdot \sin\left(\theta + \frac{\pi}{n}\right) \cdot \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right) \cdots\cdots \sin\left[\theta + \frac{(n-1)\pi}{n}\right],$$

$$\cos n\theta = 2^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\theta + \frac{3\pi}{2n}\right)\cdots\cdots \sin\left[\theta + \frac{(2n-1)\pi}{2n}\right]$$ **என நிறுவுக.**

$$x^{2n} - 2x^n \cos n\theta + 1 = \prod_{r=0}^{n-1}\left[x^2 - 2x\cos\left(\theta + \frac{2r\pi}{n}\right) + 1\right]$$

[ சூத்திரம் (128) ]

இதில் $x$-க்குப் பதில் 1 ஐயும், $\theta$-க்குப் பதில் $2\theta$ ஐயும் போட,

$$2 - 2\cos 2n\theta = \prod_{r=0}^{n-1}\left[2 - 2\cos\left(2\theta + \frac{2r\pi}{n}\right)\right]$$

**அ-து,** $$2(1 - \cos 2n\theta) = 2^n \prod_{r=0}^{n-1}\left[1 - \cos\left(2\theta + \frac{2r\pi}{n}\right)\right]$$

அ-து, $$2^2 \sin^2 n\theta = 2^n \prod_{r=0}^{n-1} 2\sin^2\left(\theta + \frac{r\pi}{n}\right)$$

$$= 2^{2n} \prod_{r=0}^{n-1} \sin^2\left(\theta + \frac{r\pi}{n}\right)$$

$$\therefore \quad 2\sin n\theta = \pm 2^n \prod_{r=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{r\pi}{n}\right)$$

அ-து, $\sin n\theta = \pm 2^{n-1} \sin\theta . \sin\left(\theta + \frac{\pi}{n}\right) . \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right)$

$$\ldots\ldots \sin\left[\theta + \frac{(n-1)\pi}{n}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{n}$ எனில், சமன்பாடு (i)-ல் சம்பந்தப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோணமும் $\pi$-க்குக் குறைவு. எனவே, வலப் பக்கத்தில் நேர் குறியே (Positive sign) ஏற்கத் தக்கது. $\theta$ ஆனது தொடர்ச்சியாக மாறிக் கொண்டு வந்தால், $n\theta$ ஆனது $r\pi$ ஐக் கடக்கும் போதெல்லாம், அதாவது $\theta$ ஆனது $\frac{r\pi}{n}$ ஐக் கடக்கும் போதெல்லாம், $\sin n\theta$-ன் குறி மாறுகிறது. அதே நேரத்தில் வலப் பக்கம் உள்ள காரணிகளில் ஒரே ஒரு காரணியின் குறி மட்டும் மாறுகிறது. எனவே, எப்பொழுதும் வலப் பக்கத்தில் நேர் குறியே ஏற்கத்தக்கது.

$$\therefore \sin n\theta = 2^{n-1} \sin\theta . \sin\left(\theta + \frac{\pi}{n}\right) . \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\ldots\ldots \sin\left[\theta + \frac{(n-1)\pi}{n}\right] \qquad (136)$$

$\theta$-க்குப் பதில் $\theta + \frac{\pi}{2n}$ ஐப் போட்டோமானால்,

$$\cos n\theta = 2^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2n}\right) . \sin\left(\theta + \frac{3\pi}{2n}\right)$$

$$\ldots\ldots \sin\left(\theta + \frac{(2n-1)\pi}{2n}\right) \qquad (137$$

**மாதிரிக் கணக்கு 5-7.14.**

$\sin\frac{\pi}{n} . \sin\frac{2\pi}{n} \ldots\ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$ **என நிறுவுக.**

$$x^{2n} - 2x^n \cos n\theta + 1 = \prod_{r=0}^{n-1} \left[x^2 - 2x \cos\left(\theta + \frac{2r\pi}{n}\right) + 1\right]$$

[ சூத்திரம் (128) ]

இதில் $\theta = 0$ என்று இட,

$$\therefore x^{2n} - 2x^n + 1 = \prod_{r=0}^{n-1} \left[x^2 - 2x \cos\frac{2r\pi}{n} + 1\right]$$

அ - து, $(x^n - 1)^2 = (x^2 - 2x \cos 0 + 1).\prod_{r=1}^{n-1}\left[x^2 - 2x \cos\frac{2r\pi}{n} + 1\right]$

$$= (x^2 - 2x + 1).\prod_{r=1}^{n-1}\left[x^2 - 2x \cos\frac{2r\pi}{n} + 1\right]$$

$$= (x-1)^2 \prod_{r=1}^{n-1}\left[x^2 - 2x \cos\frac{2r\pi}{n} + 1\right]$$

$$\therefore \left(\frac{x^n - 1}{x - 1}\right)^2 = \prod_{r=1}^{n-1}\left[x^2 - 2x \cos\frac{2r\pi}{n} + 1\right]$$

அ - து, $[x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + x^2 + x + 1]^2$

$$= \prod_{r=1}^{n-1}\left[x^2 - 2x \cos\frac{2r\pi}{n} + 1\right]$$

$x = 1$ என்று இட

$$n^2 = \prod_{r=1}^{n-1}\left[2 - 2 \cos\frac{2r\pi}{n}\right]$$

$$= \prod_{r=1}^{n-1} 2\left[1 - \cos\frac{2r\pi}{n}\right]$$

$$= \prod_{r=1}^{n-1} 2^2 \sin^2\frac{r\pi}{n}$$

$$= 2^{2(n-1)} \prod_{r=1}^{n-1} \sin^2\frac{r\pi}{n}$$

$$\therefore\ n = \pm 2^{n-1} \prod_{r=1}^{n-1} \sin\frac{r\pi}{n}$$

$$= \pm 2^{n-1} \sin\frac{\pi}{n}.\sin\frac{2\pi}{n}\ \ldots\ldots\ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$

இதில் சம்பந்தப்பட்டுள்ள கோணங்களில் ஒவ்வொரு கோணமும் $\pi$-க்குக் குறைவு ; ஆகவே, அவைகளின் **சைன்கள்** (Sines) எல்லாம் நேர் எண்கள். எனவே, வலப் பக்கத்தில் **நேர்** குறியே ஏற்கத் தக்கது.

$$\therefore \quad n = 2^{n-1} \sin\frac{\pi}{n} \,.\, \sin\frac{2\pi}{n} \,\ldots\ldots\ldots\ldots\, \sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$

அ-து, $$\sin\frac{\pi}{n} \,.\, \sin\frac{2\pi}{n} \,\ldots\ldots\ldots\ldots\, \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 5-7.15.**

$$\frac{x^n - a^n \cos n\theta}{x^{2n} - 2x^n a^n \cos n\theta + a^{2n}} =$$

$$\frac{1}{nx^{n-1}} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{x - a\cos\left(\theta + \frac{2r\pi}{n}\right)}{x^2 - 2xa\cos\left(\theta + \frac{2r\pi}{n}\right) + a^2}$$ என நிறுவுக.

$$x^{2n} - 2x^n a^n \cos n\theta + a^{2n}$$

$$= \prod_{r=0}^{n-1} \left[ x^2 - 2x\, a\cos\left(\theta + \frac{2r\pi}{n}\right) + a^2 \right]$$

[(சூத்திரம் 127)]

இரண்டு பக்கமும் அடி (Base) $e$-க்கு மடக்கை (Logarithm) எடுக்க,

$$\log_e [x^{2n} - 2x^n a^n \cos n\theta + a^{2n}]$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} \log_e \left[ x^2 - 2xa\cos\left(\theta + \frac{2r\pi}{n}\right) + a^2 \right]$$

இரண்டு பக்கங்களையும் $x$ ஐக் குறித்து வகையிட (Differentiating both sides with respect to $x$)

$$\frac{2n\, x^{2n-1} - 2n\, x^{n-1} a^n \cos n\theta}{x^{2n} - 2x^n a^n \cos n\theta + a^{2n}}$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} \frac{2x - 2a\cos\left(\theta + \frac{2r\pi}{n}\right)}{x^2 - 2xa\cos\left(\theta + \frac{2r\pi}{n}\right) + a^2}$$

அ-து, $$\frac{2n\, x^{n-1}(x^n - a^n \cos n\theta)}{x^{2n} - 2x^n a^n \cos n\theta + a^{2n}}$$

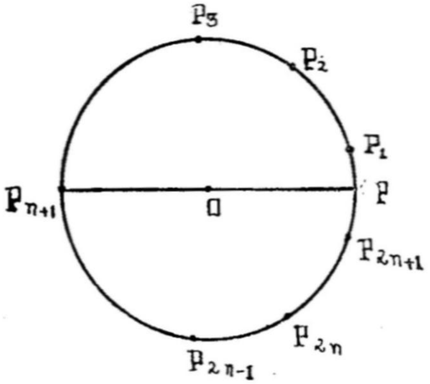
$$= \sum_{r=0}^{n-1} \frac{2\left[ x - a\cos\left(\theta + \frac{2r\pi}{n}\right)\right]}{x^2 - 2xa\cos\left(\theta + \frac{2r\pi}{n}\right) + a^2}$$

$$\therefore \quad \frac{x^n - a^n \cos n\theta}{x^{2n} - 2x^n a^n \cos n\theta + a^{2n}}$$

$$= \frac{1}{nx^{n-1}} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{x - a\cos\left(\theta + \frac{2r\pi}{n}\right)}{x^2 - 2xa\cos\left(\theta + \frac{2r\pi}{n}\right) + a^2}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 5-7.16.**

**$P_1 P_2 P_3$ ............ $P_{2n+1}$ என்ற ஓர் ஒழுங்குப் பலகோணம் ஆரம் '$a$' உள்ள ஒரு வட்டத்தினுள்ளே வரையப்பட்டுள்ளது. P என்பது வில் $P_1$ $P_{2n+1}$-ன் நடுப்புள்ளி எனில், $PP_1 . PP_2 . PP_3 .$ ......... $. PP_n = a^n$ என நிறுவுக.**




படம் 32

கொடுக்கப்பட்டுள்ள பலகோணத்திற்கு $2n + 1$ பக்கங்கள் உள்ளன. P ஆனது வில் $P_1P_{2n+1}$-ன் நடுப்புள்ளி (படம் 32). எனவே, $PP_{n+1}$ என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள வட்டத்தின் ஒரு விட்டமாகும்.

$\therefore \quad PP_{n+1} = 2a$

மேலும்,

$$\left.\begin{aligned} PP_{2n+1} &= PP_1 \\ PP_{2n} &= PP_2 \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ PP_{n+2} &= PP_n \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(i)}$$

$OP = a =$ வட்டத்தின் ஆரம்.

எனவே, கோட்சின் வட்டப் பண்பின்படி

[சூத்திரம் (132)-ன் படி]

$$PP_1 \,.\, PP_2 \,.\, \ldots\ldots PP_n \,.\, PP_{n+1} \,.\, PP_{n+2} \ldots\ldots \,.\, PP_{2n} \,.\, PP_{2n+1} = a^{2n+1} + a^{2n+1}$$

அ - து, $PP_1 \,.\, PP_2 \,.\, \ldots\ldots PP_n.\, PP_{n+1} \,.\, PP_n \ldots\ldots \,.\, PP_2 \,.\, PP_1 = 2a^{2n+1}$ [ (i)-லிருந்து]

அ - து, $PP_1^2 \,.\, PP_2^2 \ldots\ldots PP_n^2 \,.\, PP_{n+1} = 2a^{2n+1}$

அ - து, $PP_1^2 \,.\, PP_2^2 \,.\, \ldots\ldots PP_n^2 \,.\, 2a = 2a^{2n+1}$

$\therefore \quad PP_1^2 \,.\, PP_2^2 \,.\, \ldots\ldots \,.\, PP_n^2 = a^{2n}$

$\therefore \quad PP_1 \,.\, PP_2 \,.\, \ldots\ldots \,.\, PP_n = a^n$

## பயிற்சி 5

**1. கீழ்வருவனவற்றை மெய்யான காரணிகளாகப் பிரிக்க.**

(a) $x^6 - 1$

(b) $x^8 - 1$ (அண்ணுமலை ப. க. 1947)

(c) $x^{10} - 1$ (செ. ப. 1945 செ.; 1961 செ.)

(d) $x^{14} - 1$ (செ. ப. 1940 மா.)

(e) $x^{2n} - 1$ (செ. ப. 1947 செ.; 1953 செ.; 1954 மா.; 1969 செ.)

**2. கீழ்வருவனவற்றை மெய்யான காரணிகளாகப் பிரிக்க.**

(a) $x^5 - 1$

(b) $x^7 - 1$

(c) $x^9 - 1$

(d) $x^{15} - 1$ (செ. ப. 1949 செ.)

**3. கீழ்வருவனவற்றை மெய்யான காரணிகளாகப் பிரிக்க.**

(a) $x^6 + 1$

(b) $x^8 + 1$

(c) $x^{10} + 1$ (செ. ப. 1944 செ.)

(d) $x^{12} + 1$ (செ. ப. 1942 செ.

**4. கீழ்வருவனவற்றை மெய்யான காரணிகளாகப்பிரிக்க.**

(a) $x^5 + 1$

(b) $x^{11} + 1$ (செ. ப. 1948 மா.; 1951 செ.)

(c) $x^{13} + 1$

(d) $x^{15} + 1$

**5. கீழ்வருவனவற்றை மெய்யான இருபடிக் காரணிகளாகப் பிரிக்க.**

(a) $x^8 - 2x^4 \cos 4\,\theta + 1$

(b) $x^{10} - 2x^5 \cos 5\,\theta + 1$

(c) $x^8 - 2x^4 \cos 60^\circ + 1$

(d) $x^{10} - 2x^5 \cos \dfrac{\pi}{3} + 1$

(e) $x^{10} - x^5 + 1$ (செ. ப. 1939 செ.)

(f) $x^{12} - x^6 + 1$ (செ. ப. 1947 மா.)

(g) $x^8 + x^4 + 1$

(h) $x^{10} + x^5 + 1$

(i) $x^{14} + x^7 + 1$

(j) $x^6 + 2\,x^3 \cos 120^\circ + 1$

6. $\dfrac{x^{11} - 1}{x - 1}$ ஐ மெய்யான இருபடிக் காரணிகளாகப் பிரிக்க. $11\,\alpha = \pi$ எனில், $2^5 \cos \alpha \,.\, \cos 2\,\alpha \,.\, \cos 3\,\alpha \,.\, \cos 4\,\alpha \,.\, \cos 5\,\alpha = 1$ என நிறுவுக. (செ. ப. 1938 செ.)

7. $x^{21} - 1$ ஐ மெய்யான ஒருபடி (Linear), இருபடிக் காரணி களாகப் பிரிக்க; அதிலிருந்து,

$$21 = 2^{10}\left[1 - \cos\frac{2\,\pi}{21}\right]\left[1 - \cos\frac{4\,\pi}{21}\right]\ldots\ldots\left[1 - \cos\frac{20\,\pi}{21}\right]$$

என நிறுவுக. இம்முடிவிலிருந்து,

$$\sqrt{21} = 2^{10} \sin\frac{\pi}{21} \,.\, \sin\frac{2\,\pi}{21} \,\ldots\ldots\ldots\, \sin\frac{10\,\pi}{21}$$ என்று நிரூபிக்க.

(செ. ப. 1948 செ.)

8. $n$ ஓர் ஒற்றை எண் எனில், $\dfrac{x^n + 1}{x + 1}$ ஐ இருபடிக் காரணி களாகப் பிரிக்க. (செ. ப. 1945 மா.)

9. $n$ ஓர் இரட்டை எண் எனில்,

$$2^{\frac{n-1}{2}} . \sin\frac{\pi}{2n} . \sin\frac{3\pi}{2n} . \sin\frac{5\pi}{2n} \ldots\ldots\ldots\ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = 1$$

என நிறுவுக.

10. $n$ ஓர் ஒற்றை எண் எனில்,

$$2^{\frac{n-1}{2}} . \sin\frac{\pi}{2n} . \sin\frac{3\pi}{2n} \ldots\ldots\ldots \sin\frac{(n-2)\pi}{2n} = 1$$ என நிறுவுக.

11. $n$ ஓர் இரட்டை எண் எனில்,

$$2^{\frac{n-1}{2}} . \cos\frac{\pi}{2n} . \cos\frac{3\pi}{2n} \ldots\ldots\ldots \cos\frac{(n-1)\pi}{2n} = 1$$ என நிறுவுக.

12. $n$ ஓர் ஒற்றை எண் எனில்,

$$2^{\frac{n-1}{2}} \cos\frac{\pi}{n} . \cos\frac{2\pi}{n} \ldots\ldots\ldots \cos\frac{(n-1)\pi}{2n} = 1$$ என நிறுவுக.

13. $n$ ஓர் ஒற்றை எண் எனில்,

$$\tan\frac{\pi}{n} . \tan\frac{2\pi}{n} . \tan\frac{3\pi}{n} \ldots\ldots\ldots \tan\frac{(n-1)\pi}{2n} = \sqrt{n}$$ என நிறுவுக.

14. $A_1 A_2 A_3 \ldots\ldots\ldots\ldots A_{2n}$ என்ற $2n$ பக்கங்களுடைய ஓர் ஒழுங்குப் பலகோணம், ஆரம் $r$ உள்ள ஒரு வட்டத்தினுள்ளே வரையப்பட்டுள்ளது.

$A_1 A_2 . A_1 A_3 . A_1 A_4 \ldots\ldots\ldots A_1 A_n = r^{n-1}\sqrt{n}$ என நிறுவுக.

15. $$\sin\theta . \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right) . \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{n}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \sin\left[\theta + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right]$$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(செ. ப. 1969 ஏ.)

16. $$\cos\theta . \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right) . \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{n}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \cos\left[\theta + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right]$$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(ம. ப. 1969 ஏ.)

17. $n \cot n\theta = \cot\theta + \cot\left(\theta + \frac{\pi}{n}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots + \cot\left[\theta + \frac{(n-1)\pi}{n}\right]$ என நிறுவுக.

18. $x^n + \frac{1}{x^n} + 1 = \prod_{r=0}^{n-1}\left[x + \frac{1}{x} - 2\cos\frac{(6r+2)\pi}{3n}\right]$

என நிறுவுக; இதிலிருந்து,

$$\sin\frac{\pi}{3n} \cdot \sin\frac{4\pi}{3n} \cdot \sin\frac{7\pi}{3n} \ldots\ldots\ldots \sin\frac{(3n-2)\pi}{3n} = \frac{\sqrt{3}}{2^n}$$

என்று நிரூபிக்க.

19. $P_1 P_2 P_3 \ldots\ldots\ldots P_n$ என்ற $n$ பக்கங்களுள்ள ஓர் ஒழுங்குப் பலகோணம் O ஐ மையமாகவும் $a$ ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டத்தினுள்ளே வரையப்பட்டுள்ளது. P என்ற புள்ளி $\angle POP_1 = \theta$ ஆக இருக்கும்படி அவ்வட்டப் பரிதியில் இருந்தால்,

$PP_1 \,.\, PP_2 \,.\, PP_3 \ldots\ldots\ldots\ldots PP_n = 2a^n \left|\sin\frac{n\theta}{2}\right|$ என நிறுவுக.

20. $A_1A_2A_3 \ldots\ldots A_n$ என்ற $n$ பக்கங்களுள்ள ஓர் ஒழுங்குப் பலகோணம் O ஐ மையமாகவும் $r$ ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டத்தினுள்ளே வரையப்பட்டுள்ளது. P என்ற புள்ளி, கோணம் $A_1OA_2$-ன் இரு சமவெட்டியின் மீது உள்ளது. $OP = d$ எனில்,

$PA_1 . PA_2 . PA_3 \ldots\ldots PA_n = r^n + d^n$ என நிறுவுக. (செ.ப. 1944)

21. $A_1A_2A_3 \ldots\ldots A_{2n}$ என்ற $2n$ பக்கங்களுள்ள ஓர் ஒழுங்குப் பலகோணம் O ஐ மையமாகவும், $r$ ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டத்தினுள்ளே வரையப்பட்டுள்ளது. P என்ற புள்ளி வில் $A_1 A_{2n}$-ன் நடுப்புள்ளி எனில்,

$PA_1 . PA_2 . PA_3 \ldots\ldots PA_n = \sqrt{2}\, r^n$ என நிறுவுக.

## விடைகள்

1. (*a*) $(x^2 - 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$

(*b*) $(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^2 \pm \sqrt{2}\, x + 1)$

(*c*) $(x^2 - 1) \prod_{r=1}^{4}\left[x^2 - 2x\cos\frac{r\pi}{5} + 1\right]$

(d) $(x^2 - 1) \prod_{r=1}^{6} \left[ x^2 - 2x \cos \frac{r\pi}{7} + 1 \right]$

(e) $(x^2 - 1) \prod_{r=1}^{n-1} \left[ x^2 - 2x \cos \frac{r\pi}{n} + 1 \right]$

2. (a) $(x - 1) \prod_{r=1}^{2} \left[ x^2 - 2x \cos \frac{2r\pi}{5} + 1 \right]$

(b) $(x - 1) \prod_{r=1}^{3} \left[ x^2 - 2x \cos \frac{2r\pi}{7} + 1 \right]$

(c) $(x - 1) \prod_{r=1}^{4} \left[ x^2 - 2x \cos \frac{2r\pi}{9} + 1 \right]$

(d) $(x - 1) \prod_{r=1}^{7} \left[ x^2 - 2x \cos \frac{2r\pi}{15} + 1 \right]$

3. (a) $\prod_{r=0}^{2} \left[ x^2 - 2x \cos \frac{(2r+1)\pi}{6} + 1 \right]$

(b) $\prod_{r=0}^{3} \left[ x^2 - 2x \cos \frac{(2r+1)\pi}{8} + 1 \right]$

(c) $\prod_{r=0}^{4} \left[ x^2 - 2x \cos \frac{(2r+1)\pi}{10} + 1 \right]$

(d) $\prod_{r=0}^{5} \left[ x^2 - 2x \cos \frac{(2r+1)\pi}{10} + 1 \right]$

4. (a) $(x + 1) \prod_{r=0}^{1} \left[ x^2 - 2x \cos \frac{(2r+1)\pi}{5} + 1 \right]$

(b) $(x + 1) \prod_{r=0}^{4} \left[ x^2 - 2x \cos \frac{(2r+1)\pi}{11} + 1 \right]$

(c) $(x + 1) \prod_{r=0}^{5} \left[ x^2 - 2x \cos \frac{(2r+1)\pi}{13} + 1 \right]$

(*d*) $(x+1)\prod_{r=0}^{6}\left[x^2 - 2x\cos\frac{(2r+1)\pi}{15} + 1\right]$

5\. (*a*) $(x^2 - 2x\cos\theta + 1)(x^2 + 2x\cos\theta + 1)$
$(x^2 - 2x\sin\theta + 1)(x^2 + 2x\sin\theta + 1)$

(*b*) $\prod_{r=0}^{4}\left[x^2 - 2x\cos\left(\theta + \frac{2r\pi}{5}\right) + 1\right]$

(*c*) $\prod_{r=0}^{3}\left[x^2 - 2x\cos\frac{(6r+1)\pi}{12} + 1\right]$

(*d*) $\prod_{r=0}^{4}\left[x^2 - 2x\cos\frac{(6r+1)\pi}{15} + 1\right]$

(*e*) $\prod_{r=0}^{4}\left[x^2 - 2x\cos\frac{(6r+1)\pi}{15} + 1\right]$

(*f*) $\prod_{r=0}^{5}\left[x^2 - 2x\cos\frac{(6r+1)\pi}{18} + 1\right]$

(*g*) $\prod_{r=0}^{3}\left[x^2 - 2x\cos\frac{(3r+1)\pi}{6} + 1\right]$

(*h*) $\prod_{r=0}^{4}\left[x^2 - 2x\cos\frac{(6r+2)\pi}{15} + 1\right]$

(*i*) $\prod_{r=0}^{6}\left[x^2 - 2x\cos\frac{(6r+2)\pi}{21} + 1\right]$

(*j*) $\prod_{r=0}^{2}\left[x^2 + 2x\cos(3r+1)\frac{2\pi}{9} + 1\right]$

6\. $\prod_{r=1}^{5}\left[x^2 - 2x\cos\frac{2r\pi}{11} + 1\right]$

7\. $(x-1)\prod_{r=1}^{10}\left[x^2 - 2x\cos\frac{2r\pi}{21} + 1\right]$

8. $$\prod_{r=0}^{\frac{n-3}{2}} \left[ x^2 - 2x \cos \frac{(2r+1)\pi}{n} + 1 \right]$$

15. $$\frac{1}{2^{n-1}} \left[ \cos \frac{n\pi}{2} - \cos n \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

16. $$\frac{1}{2^{n-1}} \left[ \cos \frac{n\pi}{2} - \cos n (\theta + \pi) \right]$$

# 6. அதிபரவளைச் சார்புகள்

## (Hyperbolic Functions)

**6·1. சிக்கற்றொடரும், அதன் ஒருங்கும் தன்மையும்** (Complex Series and Its Convergency)

$x_n, y_n$ $[n = 1, 2, 3, \ldots\ldots]$ என்பவை மெய் எண்கள்,

$z_n = x_n + i\, y_n$ எனில்,

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots\ldots\ldots\ \infty$, என்ற தொடர் (Series), முடிவிலாச் சிக்கற்றொடர் அல்லது கந்தழி சிக்கற்றொடர் (Infinite Complex Series) என அழைக்கப்படுகிறது.

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ என்ற தொடர்கள் இரண்டும் ஒருங்கும் தன்மை உடையவைகளாக இருந்தால், $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ என்ற சிக்கற்றொடரும் ஒருங்கும் தன்மை (குவியும் தன்மை) உடையது எனச் சொல்லுகிறோம்.

$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + |z_3| + \ldots\ldots\ldots\ \infty$ என்ற தொடர் ஒருங்கும் தன்மை (குவியும் தன்மை) உடையது என்றால், $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ என்ற தொடர் ஓர் அறவொருங்குத் தொடர் (Absolutely Convergent Series) என அழைக்கப்படுகிறது. இந்த நிபந்தனை

பொருந்தி வந்தால், $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ என்ற தொடர் ஒருங்கும் தன்மை உடையது என்பது தெளிவு.

**6·2. அடுக்குக்குறித் தொடர் (Exponential Series)**

$x$ ஆனது எந்த ஒரு மெய் எண்ணுக இருந்தாலும் $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$, என்ற முடிவிலாத் தொடர் ஒருங்கும் தன்மை உடையது என்றும், அதன் கூட்டுத் தொகை $e^x$ என்றும் அறிவோம். அதாவது,

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \infty$. இதில் $e$ என்பது $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots\ldots \infty$, என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகையாகும். $x$ ஒரு சிக்கல் எண் (மெய் எண் அல்ல) எனில், $e^x$-க்கு இதுவரை பொருள் கிடையாது.

$z$ என்பது எந்த ஓர் எண்ணுக (மெய் எண்ணுகவோ அல்லது சிக்கல் எண்ணுகவோ) இருந்தாலும்,

$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\ldots \infty$, என்ற முடிவிலாத் தொடரானது $e^z$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது. அதாவது,

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots \infty.$$

இந்தத் தொடருக்கு அடுக்குக்குறித் தொடர் (Exponential Series) என்பது பெயர். $z$ ஆனது மெய் எண்ணுக இருந்தால், நாம் மேலே பார்த்தபடி,

$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots$ என்ற தொடர் $\left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots \infty\right]^z$-க்குச் சமம். $z = x + iy,\ y \neq 0$ எனில் $e^z$-ல் உள்ள $e$ ஆனது $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots\ldots \infty$, என்ற தொடரைக் குறிக்காது. அதாவது, $z = x + iy,\ y \neq 0$ எனில், $e^z$ ஆனது $1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$, என்ற தொடரைக் குறிக்கும் ஒரு குறியீடு (Symbol) தான்.

**6.3. அடுக்குக்குறித் தொடரின் ஒருங்கும் தன்மை**

$z = x + iy = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r > 0$ எனில்,

$$\left|1\right| + \left|\frac{z}{1!}\right| + \left|\frac{z^2}{2!}\right| + \left|\frac{z^3}{3!}\right| + \ldots\ldots\ldots\infty$$

$$= 1 + \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\infty$$

ஆனல், $r$-ன் மதிப்பு எதுவாகிலும், $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!}$ என்ற தொடர் ஒருங்கும் தன்மை உடையது. எனவே, $z$-ன் மதிப்பு எதுவாகிலும், $1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\ldots\infty$, என்ற அடுக்குக் குறித் தொடர் அறவொருங்கும் தன்மை உடையது, அதனல் ஒருங்கும் தன்மை உடையது.

**6.4. அடுக்குக்குறிச் சார்புகளின் பெருக்கல் (Multiplication of Exponential Functions)**

$z_1$, $z_2$, என்பவை இரு சிக்கல் எண்கள் எனில்,

$e^{z_1} . e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$ என்று நிரூபிக்கலாம். எனவே, பொதுவாக, $e^{z_1} . e^{z_2} . e^{z_3} \ldots\ldots e^{z_n} = e^{z_1 + z_2 + z_3 + \ldots\ldots + z_n}$

**6.5. அடுக்குக்குறிச் சார்பின் பொருள்**

$z = x + iy$ எனில்,

$$e^z = e^{x+iy}$$

$$= e^x\, e^{iy} \qquad [6.4.\text{-ன் படி}]$$

$$= e^x \left[1 + \frac{iy}{1!} + \frac{i^2y^2}{2!} + \frac{i^3y^3}{3!} + \frac{i^4y^4}{4!} + \ldots\ldots\infty\right] \qquad [\text{வரையறையின் படி}]$$

$$= e^x \left[\left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots\ldots\infty\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots\ldots\infty\right)\right]$$

$$= e^x\,[\cos y + i\sin y] \qquad (138)$$

அ-து, $e^z = e^x\,[\cos(2r\pi + y) + i\sin(2r\pi + y)]$, (139)

$r$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

எனவே, $e^{x+iy}$ என்பது $e^{x}$ ஐ மட்டாகவும் (Modulus), $2r\pi + y$ ஐ வீச்சாகவும் (வீச்சமாகவும்) கொண்ட ஒரு சிக்கல் எண்.

**6.6.** $e^{z}$**-ன் வீச்சின் (வீச்சத்தின்) முதன் மதிப்பு** (Principal Value of the Amplitude of $e^{z}$)

$-\pi < 2s\pi + y \leqslant \pi$ ஆக இருக்கும்படி $s$ என்ற எண்ணை (முழு எண் அல்லது பூச்சியம்)த் தேர்ந்தெடுத்தோமானால், $2s\pi + y$ என்பதை $e^{z} = e^{x+iy}$-ன் வீச்சின் (வீச்சத்தின்) முதன் மதிப்பு (Principal Value of The Amplitude of $e^{z}$) என்று எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

**6.7. அடுக்குக்குறிச் சார்பின் கால வட்ட ஒழுங்குடைமை** (Periodicity of the Exponential Function)

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+iy+2\pi i}$$

$$= e^{x+i(2\pi+y)}$$

$$= e^{x}[\cos(2\pi+y) + i\sin(2\pi+y)]$$

[சூத்திரம் (138) -ன் படி]

$$= e^{x}[\cos y + i\sin y]$$

$$= e^{z}$$ [சூத்திரம் (138) -ன் படி]

எனவே, $e^{z}$ என்பது $2\pi i$ ஐக் கால வட்டமாகக் (Period) கொண்ட ஒரு கால வட்ட ஒழுங்குடைய சார்பு (Periodic Function) ஆகும்.

**குறிப்பு :**

K என்பது ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம் எனில்,

$$e^{z} = e^{z+2K\pi i} \qquad (140)$$

**6.8.** $z$**-ன் வட்டச் சார்புகள்** (Circular Functions of $z$)

$z$ என்பது எந்த ஒரு சிக்கல் எண் என்றாலும்

$$\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots\dots\dots\infty,$$

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\dots\dots\infty,$$ என்ற தொடர்கள்

முறையே $\sin z$, $\cos z$ என்று குறிக்கப்படுகின்றன.

$z$ ஒரு மெய் எண் என்றால், நாம் ஏற்கெனவே அறிந்துள்ளபடி $\sin z$, $\cos z$ என்பவை விகிதங்களைக் குறிக்கின்றன. $z$ ஒரு மெய் எண் அல்ல எனில், $\sin z$, $\cos z$ என்பவை விகிதங்களைக் குறிக்க மாட்டா; அவைகள் மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர்களுக்குரிய குறியீடுகளே (Symbols) ஆகும்.

$z$-ன் இந்த இரண்டு வட்டச் சார்புகள் தவிர, மீதமுள்ள $\tan z$, $\cot z$, $\operatorname{cosec} z$, $\sec z$ என்ற வட்டச் சார்புகள்

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}$$

என வரையறுக்கப்படுகின்றன.

**குறிப்பு :**

1. $\sin(-z) = -\sin z$
2. $\cos(-z) = \cos z$
3. $\tan(-z) = -\tan z$

## 6.9. ஆய்லரின் அடுக்குக்குறி மதிப்புகள் (Euler's Exponential Values)

$z$ என்பது எந்த ஒரு சிக்கல் எண் என்றாலும்,

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{i^2 z^2}{2!} + \frac{i^3 z^3}{3!} + \frac{i^4 z^4}{4!} + \dots\dots\dots\dots \infty$$

[வரையறையின் படி]

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\dots\dots \infty\right)$$

$$+ i\left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\dots\dots \infty\right)$$

அ-து, $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ (141)

$\therefore \quad e^{i(-z)} = \cos(-z) + i \sin(-z)$

அ-து, $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$ (142)

$$\therefore \quad e^{iz} + e^{-iz} = 2 \cos z$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin z$$

எனவே, $z$ என்பது எந்த ஒரு சிக்கல் எண் என்றாலும்,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{143}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{144}$$

இந்த மதிப்புகள் இரண்டும், $\cos z$, $\sin z$ என்பவைகளுக்குரிய ஆய்லரின் அடுக்குக்குறி மதிப்புகள் (Euler's Exponential Values) என அழைக்கப்படுகின்றன.

## 6.10. வட்டச் சார்புகள் சம்பந்தப்பட்ட சர்வசமங்கள் (Identities)

$z$ என்பது ஒரு சிக்கல் எண் எனில்,

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} - 2}{-4} + \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} + 2}{4}$$

$$= \frac{-e^{2iz} - e^{-2iz} + 2 + e^{2iz} + e^{-2iz} + 2}{4}$$

$$= \frac{4}{4}$$

அ-து, $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

இதிலிருந்து, $1 + \tan^2 z = \sec^2 z$

$1 + \cot^2 z = \operatorname{cosec}^2 z$ என்று நிறுவலாம்.

$z_1, z_2$ என்பவை சிக்கல் எண்கள் எனில்,

$\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

$$= \frac{\left(e^{iz_1} - e^{-iz_1}\right)}{2i} \cdot \frac{\left(e^{iz_2} + e^{-iz_2}\right)}{2} + \frac{\left(e^{iz_1} + e^{-iz_1}\right)}{2} \cdot \frac{\left(e^{iz_2} - e^{-iz_2}\right)}{2i}$$

$$= \frac{1}{4i}\Big[e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}\Big]$$

$$= \frac{1}{4i}\left[2e^{i(z_1+z_2)} - 2e^{-i(z_1+z_2)}\right]$$

$$= \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i}$$

$$= \sin(z_1+z_2)$$

$$\therefore \quad \sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

இதேபோல்,

$$\sin(z_1 - z_2) = \sin z_1 \cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$$

$$\tan(z_1 \pm z_2) = \frac{\tan z_1 \pm \tan z_2}{1 \mp \tan z_1 \tan z_2}$$

$$\sin(z_1+z_2) + \sin(z_1-z_2) = 2\sin z_1 \cos z_2$$

$$\sin(z_1+z_2) - \sin(z_1-z_2) = 2\cos z_1 \sin z_2$$

$$\cos(z_1+z_2) + \cos(z_1-z_2) = 2\cos z_1 \cos z_2$$

$$\cos(z_1+z_2) - \cos(z_1-z_2) = -2\sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin z_1 + \sin z_2 = 2\sin\frac{z_1+z_2}{2}\cos\frac{z_1-z_2}{2}$$

$$\sin z_1 - \sin z_2 = 2\cos\frac{z_1+z_2}{2}\sin\frac{z_1-z_2}{2}$$

$$\cos z_1 + \cos z_2 = 2\cos\frac{z_1+z_2}{2}\cos\frac{z_1-z_2}{2}$$

$$\cos z_1 - \cos z_2 = -2\sin\frac{z_1+z_2}{2}\sin\frac{z_1-z_2}{2}$$ என்று நிறுவ

முடியும்.

மேலும்,

$$\sin 2z = 2\sin z \cos z = \frac{2\tan z}{1+\tan^2 z}$$

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z = 2\cos^2 z - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 z = \frac{1-\tan^2 z}{1+\tan^2 z}$$

$$\tan 2z = \frac{2\tan z}{1-\tan^2 z}$$

$$\sin 3z = 3\sin z - 4\sin^3 z$$

$$\cos 3z = 4\cos^3 z - 3\cos z$$

$$\tan 3z = \frac{3\tan z - \tan^3 z}{1 - 3\tan^2 z}$$ என்று நிரூபிக்கலாம்.

**குறிப்பு :**

மெய்க் கோணங்களுக்கு (Real Angles) உண்மையானவை என்று நிறுவப்பட்ட திரிகோண கணிதச் சூத்திரங்கள் (Trigonometrical Formulae) எல்லாம், மெய்க் கோணத்திற்குப் பதில் எந்தச் சிக்கல் எண்ணைப் போட்டாலும், உண்மையாக இருக்கின்றன.

## 6.11. வட்டச் சார்புகளின் காலவட்ட ஒழுங்குடைமை

$$\sin(z+2\pi) = \sin z \cos 2\pi + \cos z \sin 2\pi$$
$$= \sin z$$
$$\cos(z+2\pi) = \cos z \cos 2\pi - \sin z \sin 2\pi$$
$$= \cos z$$

எனவே, $\sin z$, $\cos z$ என்ற இரு வட்டச் சார்புகளும் $2\pi$ ஐக் காலவட்டமாகக் (Period) கொண்ட காலவட்ட ஒழுங்குடைய சார்புகள் (Periodic Functions) ஆகும். ஆகவே, $\operatorname{cosec} z$ -ம், $\sec z$ -ம் $2\pi$ ஐக் காலவட்டமாகக் கொண்ட காலவட்ட ஒழுங்குடைய சார்புகள் ஆகும்.

$$\sin(z+\pi) = \sin z \cos \pi + \cos z \sin \pi$$
$$= -\sin z$$
$$\cos(z+\pi) = \cos z \cos \pi - \sin z \sin \pi$$
$$= -\cos z$$
$$\therefore \quad \tan(z+\pi) = \frac{\sin(z+\pi)}{\cos(z+\pi)}$$
$$= \frac{-\sin z}{-\cos z}$$
$$= \tan z$$

எனவே, $\tan z$ என்ற வட்டச் சார்பு $\pi$ ஐக் காலவட்டமாகக் (Period) கொண்ட காலவட்ட ஒழுங்குடைய சார்பு (Periodic Function) ஆகும். ஆகவே, $\cot z$ -ம் $\pi$ ஐக் காலவட்டமாகக் கொண்ட காலவட்ட ஒழுங்குடைய சார்பு ஆகும்.

**குறிப்பு :**

K ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம் எனில்,

$$\sin(z+2K\pi) = \sin z \qquad (145)$$
$$\cos(z+2K\pi) = \cos z \qquad (146)$$
$$\tan(z+K\pi) = \tan z \qquad (147)$$

## 6.12. அதிபரவளைச் சார்புகள் (Hyperbolic Functions)

$z$ என்பது எந்த ஒரு எண்ணுக (மெய் எண்ணுகவோ அல்லது சிக்கல் எண்ணுகவோ) இருந்தாலும்,

$\dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ என்பது $z$-ன் அதிபரவளைச் சைன் (Hyperbolic sine of $z$) என்றும், $\dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ என்பது $z$-ன் அதிபரவளைக் கொசைன் (Hyperbolic cosine of $z$) என்றும் வரையறுக்கப்படுகின்றன ; இந்த இரண்டு சார்புகளும் முறையே $\sinh z$, $\cosh z$ என்று குறிக்கப்படுகின்றன. அதாவது,

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \tag{148}$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \tag{149}$$

$z$-ன் சைன் (Sine), கொசைன் (Cosine) ஆகியவற்றின் மூலம் டேஞ்சன்ட் (Tangent), கோடேஞ்சன்ட் (Cotangent), கொசீக்கன்ட் (Cosecant), சீக்கன்ட் (Secant) என்ற வட்டச் சார்புகள் (Circular Functions) வரையறுக்கப்பட்டது போலவே, $z$-ன் அதிபரவளை சைன், அதிபரவளைக் கொசைன் ஆகியவற்றின் மூலம், அதிபரவளை டேஞ்சன்ட், அதிபரவளைக் கோடேஞ்சன்ட், அதிபரவளைக் கொசீக்கன்ட், அதிபரவளை சீக்கன்ட் என்ற அதிபரவளைச் சார்புகள் (Hyperbolic Functions) வரையறுக்கப்படுகின்றன. எனவே,

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1} \tag{150}$$

$$\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1} \tag{151}$$

$$\operatorname{cosech} z = \frac{1}{\sinh z} = \frac{2}{e^z - e^{-z}} = \frac{2e^z}{e^{2z} - 1} \tag{152}$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z} = \frac{2}{e^z + e^{-z}} = \frac{2e^z}{e^{2z} + 1} \tag{153}$$

குறிப்பு :

1. $\cosh z + \sinh z = e^{z}$ (154)

2. $\cosh z - \sinh z = e^{-z}$ (155)

**6.13.** sinh $z$, cosh $z$ **என்ற சார்புகளுக்குரிய தொடர்கள்**

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots\ldots \infty\right]$$

$$- \frac{1}{2}\left[1 - \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\ldots \infty\right]$$

$$= \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots\ldots \infty \qquad (156)$$

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots\ldots \infty\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[1 - \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\ldots \infty\right]$$

$$= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots\ldots \infty \qquad (157)$$

**குறிப்பு :**

1. $\sinh 0 = 0$ (158)
   $\cosh 0 = 1$ (159)

2. $\sinh\ (-z) = -\sinh z$ (160)
   $\cosh\ (-z) = \cosh z$ (161)
   $\tanh\ (-z) = -\tanh z$ (162)

**6.14. அதிபரவளைச் சார்புகளின் காலவட்ட ஒழுங்குடைமை** (Periodicity of Hyperbolic Functions)

K ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம் எனில், சூத்திரம் (140)-ன் படி

$$e^{z + 2K\pi i} = e^{z}$$

$$\therefore \qquad e^{z+2\pi i} = e^{z}$$

மேலும், $e^{-(z+2\pi i)} = e^{-z-2\pi i}$

$$= e^{-z} \qquad \text{[சூத்திரம் (140)-ன் படி]}$$

இப்பொழுது, $\cosh(z+2\pi i) = \dfrac{e^{z+2\pi i} + e^{-(z+2\pi i)}}{2}$

$$= \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

அ-து, $\cosh(z+2\pi i) = \cosh z$ (163)

$$\sinh(z+2\pi i) = \frac{e^{z+2\pi i} - e^{-(z+2\pi i)}}{2}$$

$$= \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

அ-து, $\sinh(z+2\pi i) = \sinh z$

எனவே, $\cosh z$, $\sinh z$ என்ற இரு அதிபரவளைச் சார்புகளும் $2\pi i$ ஐக் காலவட்டமாகக் (Period) கொண்ட காலவட்ட ஒழுங்குடைய சார்புகள் (Periodic Functions) ஆகும்.

$$\tanh(z+\pi i) = \frac{e^{z+\pi i} - e^{-(z+\pi i)}}{e^{z+\pi i} + e^{-(z+\pi i)}}$$

$$= \frac{e^{\pi i}\left[e^{z+\pi i} - e^{-(z+\pi i)}\right]}{e^{\pi i}\left[e^{z+\pi i} + e^{-(z+\pi i)}\right]}$$

$$= \frac{e^{z+2\pi i} - e^{-z}}{e^{z+2\pi i} + e^{-z}}$$

$$= \frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}}$$

அதாவது, $\tanh(z+\pi i) = \tanh z$

எனவே, $\tanh z$ ஆனது $\pi i$ ஐக் காலவட்டமாகக் கொண்ட காலவட்ட ஒழுங்குடைய சார்பு ஆகும்.

**குறிப்பு :**

அதிபரவளைச் சார்புகளின் காலவட்டங்கள் (Periods) கற்பனை எண்கள்; ஆனால் வட்டச் சார்புகளின் காலவட்டங்கள் மெய் எண்கள்.

## 6.15. வட்ட, அதிபரவளைச் சார்புகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்புகள் (Relations between Circular and Hyperbolic Functions)

$$\cos iz = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2}$$

$$= \frac{e^{-z} + e^{z}}{2}$$

அ-து, $\cos iz = \cosh z$ (166)

$$\sin iz = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i}$$

$$= \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i}$$

$$= \frac{i\left(e^{-z} - e^{z}\right)}{-2}$$

$$= \frac{i\left(e^{z} - e^{-z}\right)}{2}$$

அ-து, $\sin iz = i \sinh z$ (167)

$$\tan iz = \frac{\sin iz}{\cos iz}$$

$$= \frac{i \sinh z}{\cosh z}$$

அ-து, $\tan iz = i \tanh z$ (168)

**குறிப்பு :**

1. $\sec iz = \operatorname{sech} z$ (169)
2. $\operatorname{cosec} iz = -i \operatorname{cosech} z$ (170)
3. $\cot iz = -i \coth z$ (171)
4. $\sinh iz = i \sin z$
5. $\cosh iz = \cos z$
6. $\tanh iz = i \tan z$

### 6.16. அதிபரவளைச் சார்புகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்புகள்

பொதுவாக, வட்டச் சார்புகள் சம்பந்தப்பட்ட ஒவ்வொரு சூத்திரத்திலிருந்தும், அதிபரவளைச் சார்புகள் சம்பந்தப்பட்ட ஒரு சூத்திரத்தைப் பெறலாம்.

சான்றாக, $z$ ஒரு சிக்கல் எண் எனில்,

$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ என அறிவோம்.

$z$-க்குப் பதில் $iz$ ஐ இட,

$$(\cos iz)^2 + (\sin iz)^2 = 1$$

$$\therefore \quad (\cosh z)^2 + (i \sinh z)^2 = 1$$

அ-து, $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ **(172)**

$z_1$, $z_2$ என்பவை இரு சிக்கல் எண்கள் எனில்,

$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$ என்பது நமக்குத் தெரியும்.

$z_1$ க்குப் பதில் $iz_1$ ஐயும், $z_2$ க்குப் பதில் $iz_2$ ஐயும் இட,

$$\sin i(z_1 + z_2) = \sin iz_1 \cos iz_2 + \cos iz_1 \sin iz_2$$

அ-து, $i \sinh(z_1 + z_2) = i \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \,.\, i \sinh z_2$

அ-து, $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$ **(173)**

$\tan 3z = \dfrac{3 \tan z - \tan^3 z}{1 - 3 \tan^2 z}$ என்ற சூத்திரத்தில்,

$z$ க்குப் பதில் $iz$ ஐப் போட்டோமானல்,

$$\tan 3iz = \frac{3 \tan iz - (\tan iz)^3}{1 - 3(\tan iz)^2}$$

$$\therefore \quad i \tanh 3z = \frac{3i \tanh z - (i \tanh z)^3}{1 - 3(i \tanh z)^2}$$

$$= \frac{3i \tanh z - i^3 \tanh^3 z}{1 - 3i^2 \tanh^2 z}$$

$$= \frac{i[3 \tanh z + \tanh^3 z]}{1 + 3 \tanh^2 z}$$

$$\therefore \quad \tanh 3z = \frac{3 \tanh z + \tanh^3 z}{1 + 3 \tanh^2 z} \qquad \textbf{(174)}$$

இம்மாதிரியே கீழ்க்கண்ட சூத்திரங்களையும் நிறுவலாம்.

$\operatorname{sech}^2 z + \tanh^2 z = 1$ **(175)**

$\coth^2 z - \operatorname{cosech}^2 z = 1$ **(176)**

$$\sinh (z_1 - z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 - \cosh z_1 \sinh z_2 \qquad (177)$$

$$\cosh (z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2 \qquad (178)$$

$$\cosh (z_1 - z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 - \sinh z_1 \sinh z_2 \qquad (179)$$

$$\tanh (z_1 + z_2) = \frac{\tanh z_1 + \tanh z_2}{1 + \tanh z_1 \tanh z_2} \qquad (180)$$

$$\tanh (z_1 - z_2) = \frac{\tanh z_1 - \tanh z_2}{1 - \tanh z_1 \tanh z_2} \qquad (181)$$

$$\sinh (z_1 + z_2) + \sinh (z_1 - z_2) = 2 \sinh z_1 \cosh z_2 \qquad (182)$$

$$\sinh (z_1 + z_2) - \sinh (z_1 - z_2) = 2 \cosh z_1 \sinh z_2 \qquad (183)$$

$$\cosh (z_1 + z_2) + \cosh (z_1 - z_2) = 2 \cosh z_1 \cosh z_2 \qquad (184)$$

$$\cosh (z_1 + z_2) - \cosh (z_1 - z_2) = 2 \sinh z_1 \sinh z_2 \qquad (185)$$

$$\sinh z_1 + \sinh z_2 = 2 \sinh \frac{z_1 + z_2}{2} \cosh \frac{z_1 - z_2}{2} \qquad (186)$$

$$\sinh z_1 - \sinh z_2 = 2 \cosh \frac{z_1 + z_2}{2} \sinh \frac{z_1 - z_2}{2} \qquad (187)$$

$$\cosh z_1 + \cosh z_2 = 2 \cosh \frac{z_1 + z_2}{2} \cosh \frac{z_1 - z_2}{2} \qquad (188)$$

$$\cosh z_1 - \cosh z_2 = 2 \sinh \frac{z_1 + z_2}{2} \sinh \frac{z_1 - z_2}{2} \qquad (189)$$

$$\sinh 2z = 2 \sinh z \cosh z = \frac{2 \tanh z}{1 - \tanh^2 z} \qquad (190)$$

$$\left.\begin{aligned} \cosh 2z &= \cosh^2 z + \sinh^2 z \\ &= 2 \cosh^2 z - 1 \\ &= 1 + 2 \sinh^2 z \\ &= \frac{1 + \tanh^2 z}{1 - \tanh^2 z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (191)$$

$$\tanh 2z = \frac{2 \tanh z}{1 + \tanh^2 z} \qquad (192)$$

$$\sinh 3z = 3 \sinh z + 4 \sinh^3 z \qquad (193)$$

$$\cosh 3z = 4 \cosh^3 z - 3 \cosh z \qquad (194)$$

## 6.17. சிக்கல் சார்புகளை மெய், கற்பனைப் பகுதிகளாகப் பிரித்தல்

$u$, $v$ என்பவை மெய் எண்களாக இருக்கும்படி $f(z)$ என்ற சிக்கல் சார்பை (Complex Function),

$f(z) = u + i\,v$ எனப் பிரிப்பதற்குச் சிக்கல் சார்பைப் பிரித்தல் (Separation of a Complex Function) என்பது பெயர்.

சான்றாக,
$$\begin{aligned}\sin z &= \sin(x + i\,y)\\ &= \sin x \cos i\,y + \cos x \sin i\,y\\ &= \sin x \cosh y + \cos x\; i \sinh y\\ &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y\end{aligned}$$

இதேபோல்,
$$\sin(x - i\,y) = \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$$
என்று நிரூபிக்க முடியும்.

எனவே, $\sin(x + i\,y)$, $\sin(x - i\,y)$ என்பவை இணைச் சிக்கல் சார்புகள் (Conjugate Complex Functions). இதேபோல், $\cos(x + i\,y)$, $\cos(x - i\,y)$ என்பவைகளும் இணைச் சிக்கல் சார்புகள் என்று நிறுவலாம்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பானது இரண்டு சிக்கல் சார்புகளின் பின்னமாக இருந்தால், அதைப் பிரிக்க, பகுதியின் இணைச் சிக்கல் சார்பால் பகுதியையும் தொகுதியையும் பெருக்கி, பகுதியை மெய் எண்ணுக்க வேண்டும்.

சான்றாக,
$$\begin{aligned}\tan z &= \tan(x + i\,y)\\ &= \frac{\sin(x + i\,y)}{\cos(x + i\,y)}\\ &= \frac{\sin(x + i\,y)\cos(x - i\,y)}{\cos(x + i\,y)\cos(x - i\,y)}\\ &= \frac{2\sin(x + i\,y)\cos(x - i\,y)}{2\cos(x + i\,y)\cos(x - i\,y)}\\ &= \frac{\sin[(x + i\,y) + (x - i\,y)] + \sin[(x + i\,y) - (x - i\,y)]}{\cos[(x + i\,y) + (x - i\,y)] + \cos[(x + i\,y) - (x - i\,y)]}\\ &= \frac{\sin 2x + \sin 2i\,y}{\cos 2x + \cos 2i\,y}\end{aligned}$$

$$= \frac{\sin 2x + i \sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$$

அ-து, $\tan(x + iy) = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x + \cosh 2y} + i \dfrac{\sin h\, 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$

இதேபோல்,

$$\tan(x - iy) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \cosh 2y} - i \frac{\sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$$

எனவே, $\tan(x + iy)$, $\tan(x - iy)$ என்பவைகள் இணைச் சிக்கல் சார்புகள் ஆகும்.

## 6.18. சிக்கல் கணியங்களின் நேர்மாறு வட்டச் சார்புகள் (Inverse Circular Functions of Complex Quantities)

$x + iy = \cos(u + iv)$ எனில், $u + iv$ என்பது $x + iy$-ன் ஒரு நேர்மாறு கொசைன் (Inverse Cosine) என அழைக்கப் படுகிறது.

$n$ ஒரு முழு எண் எனில்,

$x + iy = \cos(u + iv) = \cos[2n\pi \pm (u + iv)]$

எனவே, $2n\pi \pm (u + iv)$-ம், $x + iy$-ன் ஒரு நேர்மாறு கொசைன் ஆகும். ஆகவே, $x + iy$-ன் நேர்மாறு கொசைன் (Inverse Cosine) ஒரு பன்மதிப்புடைச் சார்பு (Many-Valued Function) ஆகும். இத்தன்மையை மனதில் கொள்ளும்போது அது $\mathrm{Cos}^{-1}(x + iy)$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

$2n\pi + u$ அல்லது $2n\pi - u$ ஆனது $0$-க்கும் $\pi$-க்கும் இடையே இருக்கும்போது,

$2n\pi \pm (u + iv)$-ன் மதிப்பானது,

$x + iy$-ன் நேர்மாறு கொசைனின் முதன் மதிப்பு எனச் சொல்லப்படுகிறது. இந்த முதன் மதிப்பை $\cos^{-1}(x + iy)$ ஆல் குறிக்கிறோம்.

இப்பொழுது, $\mathrm{Cos}^{-1}(x + iy) = 2n\pi \pm \cos^{-1}(x + iy)$ (195)

இதேபோல், $x + iy = \sin(u + iv)$
$= \sin[n\pi + (-1)^n(u + iv)]$ எனில்,

$n\pi + (-1)^n(u + iv)$ என்பது $x + iy$-ன் ஒரு நேர்மாறு சைன் (Inverse Sine) ஆகும். இது ஒரு பன்மதிப்புடைச் சார்பு (Many-Valued Function) ஆகும்; இது $\mathrm{Sin}^{-1}(x + iy)$ ஆல்

குறிக்கப்படுகிறது. இதனுடைய மெய்ப் பகுதி $-\frac{\pi}{2}$-க்கும், $+\frac{\pi}{2}$-க்கும் இடையே இருக்கும்போது, இதன் மதிப்பானது முதன் மதிப்பு எனச் சொல்லப்படுகிறது. இந்த முதன் மதிப்பை $\sin^{-1}(x+iy)$ ஆல் குறிக்கிறோம்.

இப்பொழுது, $\text{Sin}^{-1}(x+iy) = n\pi + (-1)^n \sin^{-1}(x+iy)$ (196)

இதேபோல், $\text{Tan}^{-1}(x+iy)$, $\tan^{-1}(x+iy)$ என்பவைகளும் வரையறுக்கப்படுகின்றன. $\text{Tan}^{-1}(x+iy)$-ன் மெய்ப் பகுதி $-\frac{\pi}{2}$-க்கும், $+\frac{\pi}{2}$-க்கும் இடையே இருக்கும்போது, இதன் மதிப்பானது முதன் மதிப்பு என அழைக்கப்படுகிறது.

இப்பொழுது,

$$\text{Tan}^{-1}(x+iy) = n\pi + \tan^{-1}(x+iy) \quad (197)$$

இதேபோல்,

$$\text{Sec}^{-1}(x+iy) = 2n\pi \pm \sec^{-1}(x+iy) \quad (198)$$

$$\text{Cosec}^{-1}(x+iy) = n\pi + (-1)^n \operatorname{cosec}^{-1}(x+iy) \quad (199)$$

$$\text{Cot}^{-1}(x+iy) = n\pi + \cot^{-1}(x+iy) \quad (200)$$

**6.19. நேர்மாறு அதிபரவளைச் சார்புகள்** (Inverse Hyperbolic Functions)

$x = \sinh y$ எனில், $y$ ஆனது $x$-ன் நேர்மாறு அதிபரவளைச் சைன் (Inverse Hyperbolic Sine of $x$) என அழைக்கப்படுகிறது; இது $\sinh^{-1} x$ ஆல் குறிக்கப்படுகிறது. இதே மாதிரியே $\cosh^{-1} x$, $\tanh^{-1} x$, $\operatorname{cosech}^{-1} x$, $\operatorname{sech}^{-1} x$, $\coth^{-1} x$ ஆகியவைகளும் வரையறுக்கப்படுகின்றன.

**நேர்மாறு அதிபரவளைச் சார்புகளை மடக்கைச் சார்புகளாகத் தெரிவித்தல்**

**6-20.1.** $x$ **ஒரு மெய் எண் எனில்,** $\sinh^{-1} x = \log_e(x + \sqrt{x^2+1})$.

**நிறுவல் :** $\sinh^{-1} x = y$ என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $\sinh y = x$

அ-து, $\frac{e^y - e^{-y}}{2} = x$

அ-து, $e^y - \frac{1}{e^y} = 2x$

அ-து, $e^{2y} - 2x\,e^y - 1 = 0$

இது $e^y$ -ல் ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு ஆகும்.

$$\therefore \quad e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2}$$

$$= \frac{2x \pm 2\sqrt{x^2 + 1}}{2}$$

$$= x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

$y$ ஒரு மெய் எண். எனவே $e^y$ ஒரு நேர் எண் (Positive Number). ஆகவே, $x - \sqrt{x^2 + 1}$ என்ற எதிர் எண் (Negative Number) ஏற்கத் தக்கதல்ல.

$$\therefore \quad e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\therefore \quad y = \log_e (x + \sqrt{x^2 + 1})$$

அது, $\sinh^{-1} x = \log_e (x + \sqrt{x^2 + 1})$ (201)

**6-20.2.** $x$ **ஒரு மெய் எண்,** $x \geqslant 1$ **எனில்,**

$$\cosh^{-1} x = \log_e (x + \sqrt{x^2 - 1})$$

**நிறுவல் :** $x \geqslant 1$

$$\therefore \quad x \pm \sqrt{x^2 - 1} > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

$\cosh^{-1} x = y$ என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $\cosh^{-1} y = x$

அ - து, $\frac{e^y + e^{-y}}{2} = x$

அ - து, $e^y + \frac{1}{e^y} = 2x$

அ - து, $e^{2y} - 2x\,e^y + 1 = 0$

இது $e^y$ -ல் ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு ஆகும்.

$$\therefore \quad e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2}$$

$$= \frac{2x \pm 2\sqrt{x^2 - 1}}{2}$$

$$= x \pm \sqrt{x^2 - 1} > 0 \qquad \text{[ (i) -லிருந்து]}$$

ஆனால், $x - \sqrt{x^2 - 1} = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = (x + \sqrt{x^2 - 1})^{-1}$

$\therefore \quad e^y = x + \sqrt{x^2 - 1}$ அல்லது $(x + \sqrt{x^2 - 1})^{-1}$

$\therefore \quad y = \pm \log_e (x + \sqrt{x^2 - 1})$

எனவே, $y$ -க்கு இரு மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன. இவற்றுள் நேர் குறியுள்ள (Positive Sign) மதிப்பையே எடுப்பது வழக்கம்.

$\therefore \quad y = \log_e (x + \sqrt{x^2 - 1})$

அ - து, $\cosh^{-1} x = \log_e (x + \sqrt{x^2 - 1})$ **(202)**

**6-20.3.** $x$ **ஒரு மெய் எண்,** $|x| < 1$ **எனில்,**

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \log_e \frac{1+x}{1-x}$$

**நிறுவல் :** $|x| < 1$

$$\therefore \quad \frac{1+x}{1-x} > 0 \qquad \text{............ (i)}$$

$\tanh^{-1} x = y$ என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $\tanh y = x$

அ - து, $\dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x$

அ - து, $\dfrac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} = \dfrac{1}{x}$

$$\therefore \quad \frac{e^y + e^{-y} + (e^y - e^{-y})}{e^y + e^{-y} - (e^y - e^{-y})} = \frac{1+x}{1-x}$$

அ - து, $\dfrac{2e^y}{2e^{-y}} = \dfrac{1+x}{1-x}$

$$\therefore \quad e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} > 0 \text{ [ (i) -லிருந்து]}$$

$$\therefore \quad 2y = \log_e \frac{1+x}{1-x}$$

$$\text{அ - து,} \quad y = \frac{1}{2}\log_e \frac{1+x}{1-x}$$

$$\text{அ - து,} \quad \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\log_e \frac{1+x}{1-x} \qquad (203)$$

## மாதிரிக் கணக்குகள்

**மாதிரிக் கணக்கு 6-21.1.**

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\cosh x - \tan x}{x^3}$ ஐக் காண்க.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\cosh x - \tan x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\left[1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots\right] - \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \ldots\ldots\right]}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\left[1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \ldots\ldots\right] - \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \ldots\ldots\right]}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left[x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} + \ldots\ldots\right] - \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \ldots\ldots\right]}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(\frac{1}{24} - \frac{2}{15}\right)x^5 + \ldots\ldots\right]}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{24} - \frac{2}{15}\right)x^2 + \ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{6}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 6-21.2.**

$$\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x} = \cosh 2x + \sinh 2x$$ **என நிறுவுக.**

(செ. ப. 1965 ஏ.)

$$\cosh 2x = \frac{\cosh 2x}{\cosh^2 x - \sinh^2 x}$$ [சூத்திரம் (172)-ன் படி]

$$= \frac{\cosh^2 x + \sinh^2 x}{\cosh^2 x - \sinh^2 x}$$ [சூத்திரம் (191)-ன் படி]

$$= \frac{1+\tanh^2 x}{1-\tanh^2 x},$$ [பகுதியையும், தொகுதியையும் $\cosh^2 x$ ஆல் வகுக்க]

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$ [சூத்திரம் (190)-ன் படி]

$$= \frac{2 \sinh x \cosh x}{\cosh^2 x - \sinh^2 x}$$ [சூத்திரம் (172)-ன் படி]

$$= \frac{2 \tanh x}{1-\tanh^2 x}$$ [பகுதியையும், தொகுதியையும் $\cosh^2 x$ ஆல் வகுக்க]

இப்பொழுது,

$$\cosh 2x + \sinh 2x$$

$$= \frac{1+\tanh^2 x}{1-\tanh^2 x} + \frac{2\tanh x}{1-\tanh^2 x}$$

$$= \frac{1+\tanh^2 x + 2\tanh x}{1-\tanh^2 x}$$

$$= \frac{(1+\tanh x)^2}{(1+\tanh x)(1-\tanh x)}$$

$$= \frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 6-21.3.**

**$\sinh^8 \theta$ ஐ $\theta$-ன் மடங்குகளுடைய அதிபரவளைக் கொசைன்களின் மூலம் விரித்தெழுதுக.**

$$\sinh^8 \theta = \left( \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} \right)^8$$

$$= \frac{1}{2^8} \Big[ e^{8\theta} - {}_8C_1\, e^{6\theta} + {}_8C_2\, e^{4\theta} - {}_8C_3\, e^{2\theta} + {}_8C_4$$

$$- {}_8C_5\, e^{-2\theta} + {}_8C_6\, e^{-4\theta} - {}_8C_7\, e^{-6\theta} + e^{-8\theta} \Big]$$

$$= \frac{1}{2^8}\Big[\left(e^{8\theta}+e^{-8\theta}\right) - {}_8C_1\left(e^{6\theta}+e^{-6\theta}\right)$$

$$+ {}_8C_2\left(e^{4\theta}+e^{-4\theta}\right) - {}_8C_3\left(e^{2\theta}+e^{-2\theta}\right) + {}_8C_4\Big]$$

$$[\because \; {}_nC_{n-r} = {}_nC_r$$

$$= \frac{1}{2^8}\Big[\left(e^{8\theta}+e^{-8\theta}\right) - 8\left(e^{6\theta}+e^{-6\theta}\right)$$

$$+ 28\left(e^{4\theta}+e^{-4\theta}\right) - 56\left(e^{2\theta}+e^{-2\theta}\right) + 70\Big]$$

$$= \frac{1}{2^8}\Big[2\cosh 8\theta - 8\,(2\cosh 6\theta) + 28\,(2\cosh 4\theta)$$

$$- 56\,(2\cosh 2\theta) + 70\Big]$$

$$= \frac{1}{2^7}\Big[\cosh 8\theta - 8\cosh 6\theta + 28\cosh 4\theta$$

$$- 56\cosh 2\theta + 35\Big]$$

**மாதிரிக் கணக்கு 6-21.4.**

$u = \log_e \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$ **எனில்**

(a) $\tanh \frac{u}{2} = \tan \frac{\theta}{2}$ (செ. ப. 1961 ஏ.; 1963 செ.)

(ம. ப. 1970 செ.)

(b) $\cosh u = \sec\theta$

(c) $\sinh u = \tan\theta$ (ம. ப. 1971 ஏ.)

**என நிறுவுக.**

(a) $u = \log_e \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$ (கொள்கை)

$$\therefore\; e^u = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{1+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\theta}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

$$\therefore \quad \frac{e^u - 1}{e^u + 1} = \frac{1 + \tan\frac{\theta}{2} - \left(1 - \tan\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \tan\frac{\theta}{2} + \left(1 - \tan\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{2}$$

அ-து, $\tanh\frac{u}{2} = \tan\frac{\theta}{2}$ [சூத்திரம் (150)-ன் படி]

(b) $\therefore \quad \tanh^2\frac{u}{2} = \tan^2\frac{\theta}{2}$

அ-து, $\dfrac{\sinh^2\frac{u}{2}}{\cosh^2\frac{u}{2}} = \dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$

$$\therefore \quad \frac{\cosh^2\frac{u}{2} + \sinh^2\frac{u}{2}}{\cosh^2\frac{u}{2} - \sinh^2\frac{u}{2}} = \frac{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}$$

அ-து, $\dfrac{\cosh u}{1} = \dfrac{1}{\cos\theta}$

அ-து, $\cosh u = \sec\theta$

(c) $$e^u = \frac{1 + \tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan\frac{\theta}{2}} \qquad \text{............ (i)}$$

$$\therefore \quad e^{-u} = \frac{1 - \tan\frac{\theta}{2}}{1 + \tan\frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore \quad e^u - e^{-u} = \frac{1 + \tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan\frac{\theta}{2}} - \frac{\left(1 - \tan\frac{\theta}{2}\right)}{\left(1 + \tan\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(1 + \tan\frac{\theta}{2}\right)^2 - \left(1 - \tan\frac{\theta}{2}\right)^2}{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{4 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore \quad \frac{e^{u} - e^{-u}}{2} = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

அ - து, $\sinh u = \tan \theta$

**மாதிரிக் கணக்கு 6-21.5.**

$\operatorname{cosec}(x + iy) = \dfrac{-2[\sin x \cosh y - i \cos x \sinh y]}{\cos 2x - \cosh 2y}$ என நிறுவுக. (செ. ப. 1951 மா.)

$$\operatorname{cosec}(x + iy) = \frac{1}{\sin(x + iy)}$$

$$= \frac{2 \sin(x - iy)}{2 \sin(x + iy) \sin(x - iy)}$$

$$= \frac{2[\sin x \cos iy - \cos x \sin iy]}{\cos[(x + iy) - (x - iy)] - \cos[(x + iy) + (x - iy)]}$$

$$= \frac{2[\sin x \cosh y - i \cos x \sinh y]}{\cos 2iy - \cos 2x}$$

$$= \frac{2[\sin x \cosh y - i \cos x \sinh y]}{\cosh 2y - \cos 2x}$$

$$= \frac{-2[\sin x \cosh y - i \cos x \sinh y]}{\cos 2x - \cosh 2y}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 6-21.6.**

$\sinh(x + iy)$ ஐ மெய், கற்பனைப் பகுதிகளாகப் பிரிக்க.

$$\begin{aligned} i \sinh(x + iy) &= \sin i(x + iy) \\ &= \sin(ix - y) \\ &= \sin ix \cos y - \cos ix \sin y \\ &= i \sinh x \cos y - \cosh x \sin y \\ &= i \sinh x \cos y + i^2 \cosh x \sin y \end{aligned}$$

$$\therefore \sinh(x + iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

**மாதிரிக் கணக்கு 6-21.7.**

$e^{\cos(x - iy)}$ ஐ மெய், கற்பனைப் பகுதிகளாகப் பிரிக்க.

$$e^{\cos(x - iy)} = e^{\cos x . \cos iy + \sin x \sin iy}$$

$$= e^{\cos x \ \cosh y + i \sin x \ \sinh y}$$

$$= e^{\cos x \ \cosh y} . e^{i \sin x \ \sinh y}$$

$$= e^{\cos x \ \cosh y} \left[ \cos(\sin x \sinh y) + i \sin(\sin x \sinh y) \right]$$

[ சூத்திரம் (141)-ன் படி ]

$$= e^{\cos x \cosh y} \cos(\sin x \sinh y) + i\, e^{\cos x \cosh y} \sin(\sin x \sinh y)$$

**மாதிரிக் கணக்கு 6-21.8.**

$x$, $y$ என்பவை மெய்யாகவும், $\tan(x + iy) = i$ ஆகவும் இருந்தால், $x$ ஒரு தேராக் கணியம் (Indeterminate Quantity) என்றும், $y$ முடிவில்லாதது என்றும் நிறுவுக.

கொள்கைப்படி, $\tan(x + iy) = 0 + i$ ......... (i)

$\therefore \tan(x - iy) = 0 - i$ ......... (ii)

இப்பொழுது,

$$\tan 2x = \tan[(x + iy) + (x - iy)]$$

$$= \frac{\tan(x + iy) + \tan(x - iy)}{1 - \tan(x + iy)\tan(x - iy)}$$

$$= \frac{i - i}{1 - i(-i)} \quad \text{[(i), (ii) -லிருந்து]}$$

$$= \frac{0}{1 + i^2}$$

$$= \frac{0}{1 - 1}$$

$$= \frac{0}{0}$$

$\therefore$ $\tan 2x$ ஒரு தேராக் கணியம்.

$\therefore$ $x$ ஒரு தேராக் கணியம்.

$$\tan 2iy = \tan[(x + iy) - (x - iy)]$$

$$= \frac{\tan(x+iy) - \tan(x-iy)}{1+\tan(x+iy)\ \tan(x-iy)}$$

$$= \frac{i+i}{1+i(-i)} \qquad [\text{(i), (ii) -லிருந்து}]$$

$$= \frac{2i}{1+1} = \frac{2i}{2}$$

அ-து, $i \tanh 2y = i$

$\therefore \ \tanh 2y = 1$

அ-து, $\dfrac{e^{2y} - e^{-2y}}{e^{2y} + e^{-2y}} = 1$

$\therefore \ e^{2y} - e^{-2y} = e^{2y} + e^{-2y}$

$\therefore \ 2e^{-2y} = 0$

$\therefore \ e^{-2y} = 0$

$\therefore \ y$ முடிவில்லாதது.

**மாதிரிக் கணக்கு 6-21.9.**

$\tan^{-1}(\alpha + i\beta)$ **ஐ மெய், கற்பனைப் பகுதிகளாகப் பிரிக்க.**

(செ. ப. 1966 ஏ.)

(செ. ப. 1961 செ.)

$\tan^{-1}(\alpha + i\beta) = x + iy$ என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $\tan(x+iy) = \alpha + i\beta$ ............ (i)

$\therefore \ \tan(x-iy) = \alpha - i\beta$ ............ (ii)

$$\tan 2x = \tan[(x+iy) + (x-iy)]$$

$$= \frac{\tan(x+iy) + \tan(x-iy)}{1 - \tan(x+iy)\tan(x-iy)}$$

$$= \frac{\alpha + i\beta + (\alpha - i\beta)}{1 - (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta)}$$

[(i), (ii) -லிருந்து]

$$= \frac{2\alpha}{1 - (\alpha^2 + \beta^2)}$$

$$\therefore \ 2x = \tan^{-1} \frac{2\alpha}{1 - (\alpha^2 + \beta^2)}$$

அ-து, $x = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2\alpha}{1-(\alpha^2+\beta^2)}$

$$\tan 2iy = \tan[(x+iy)-(x-iy)]$$

$$= \frac{\tan(x+iy) - \tan(x-iy)}{1+\tan(x+iy)\tan(x-iy)}$$

$$= \frac{\alpha + i\beta - (\alpha - i\beta)}{1+(\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta)}$$

[ (i), (ii) -லிருந்து ]

அ-து, $i \tanh 2y = \frac{2i\beta}{1+\alpha^2+\beta^2}$

$$\therefore \tanh 2y = \frac{2\beta}{1+\alpha^2+\beta^2}$$

$$\therefore 2y = \tanh^{-1} \frac{2\beta}{1+\alpha^2+\beta^2}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} \tanh^{-1} \frac{2\beta}{1+\alpha^2+\beta^2}$$

இப்பொழுது,

$$\tan^{-1}(\alpha + i\beta) = x + iy$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2\alpha}{1-(\alpha^2+\beta^2)} + i\,\frac{1}{2}\tanh^{-1}\frac{2\beta}{1+\alpha^2+\beta^2}$$

**குறிப்பு :**

$$\text{Tan}^{-1}(\alpha + i\beta) = n\pi + \tan^{-1}(\alpha + i\beta)$$

$$= n\pi + \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2\alpha}{1-(\alpha^2+\beta^2)} + \frac{i}{2}\tanh^{-1}\frac{2\beta}{1+\alpha^2+\beta^2}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 6-21.10.**

$\sin(A + iB) = x + iy$ எனில்,

$$\frac{x^2}{\sin^2 A} - \frac{y^2}{\cos^2 A} = 1, \quad \frac{x^2}{\cosh^2 B} + \frac{y^2}{\sinh^2 B} = 1$$

என நிரூபிக்க.

(செ. ப. 1962 செ.)
(செ. ப. 1966 செ.)

$$x + iy = \sin(A + iB) \qquad (\text{கொள்கை})$$
$$= \sin A \cos iB + \cos A \sin iB$$
$$= \sin A \cosh B + i \cos A \sinh B$$

$$\therefore \quad x = \sin A \cosh B$$
$$y = \cos A \sinh B$$

இப்பொழுது,

$$\frac{x^2}{\sin^2 A} - \frac{y^2}{\cos^2 A} = \cosh^2 B - \sinh^2 B = 1$$

$$\frac{x^2}{\cosh^2 B} + \frac{y^2}{\sinh^2 B} = \sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

**மாதிரிக் கணக்கு 6-21.11.**

$\cos(A + iB) = \cos\theta + i\sin\theta$ **எனில்,**

(a) $\sin\theta = \pm \sin^2 A$ (செ. ப, 1967 ஏ.; 1970 ஏ.)

(b) $\cos 2A + \cosh 2B = 2$ (செ. ப. 1961 செ.)

**என நிறுவுக.**

$$\cos\theta + i\sin\theta = \cos(A + iB) \qquad (\text{கொள்கை})$$
$$= \cos A \cos iB - \sin A \sin iB$$
$$= \cos A \cosh B - i \sin A \sinh B$$

மெய், கற்பனைப் பகுதிகளை முறையே சமப்படுத்த,

$$\cos\theta = \cos A \cosh B \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$
$$\sin\theta = -\sin A \sinh B \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

(a) $\cosh^2 B - \sinh^2 B = 1$ [சூத்திரம் (172)-ன் படி]

$$\therefore \quad \frac{\cos^2\theta}{\cos^2 A} - \frac{\sin^2\theta}{\sin^2 A} = 1 \qquad [(i), (ii) \text{-லிருந்து}]$$

அ-து, $\cos^2\theta \,.\, \sin^2 A - \sin^2\theta \,.\, \cos^2 A = \sin^2 A \,.\, \cos^2 A$

அ-து, $\sin^2 A(1 - \sin^2\theta) - \sin^2\theta(1 - \sin^2 A)$
$$= \sin^2 A(1 - \sin^2 A)$$

அ-து, $\sin^2 A - \sin^2 A \sin^2\theta - \sin^2\theta + \sin^2 A \sin^2\theta$
$$= \sin^2 A - \sin^4 A$$

$$\therefore \quad \sin^2\theta = \sin^4 A$$
$$\therefore \quad \sin\theta = \pm \sin^2 A$$

(b) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\therefore \quad \cos^2 A \cosh^2 B + \sin^2 A \sinh^2 B = 1$ [(i), (ii) -லிருந்து]

அ-து, $\cos^2 A \cosh^2 B + \sinh^2 B(1 - \cos^2 A) = 1$

அ - து, $\cos^2 A \cosh^2 B + \sinh^2 B - \cos^2 A \sinh^2 B = 1$

அ - து, $\cos^2 A (\cosh^2 B - \sinh^2 B) + \sinh^2 B = 1$

அ - து, $\cos^2 A + \sinh^2 B = 1$ [சூத்திரம் (172) -ன் படி]

அ - து, $\dfrac{1 + \cos 2A}{2} + \dfrac{\cosh 2B - 1}{2} = 1$

[சூத்திரம் (191) -ன் படி]

அ - து, $1 + \cos 2A + \cosh 2B - 1 = 2$

அ - து, $\cos 2A + \cosh 2B = 2$

**மாதிரிக் கணக்கு 6-21.12.**

$a, b, x, y$ **என்பவை மெய் எண்கள்,** $\cos(a + ib) \cosh(x + iy) = 1$ **எனில்,** $\tan a \tanh b = \tan x \tanh y$ **என நிறுவுக.**

(செ. ப. 1948 செ.)

$\cos(a + ib) = \cos a \cos ib - \sin a \sin ib$

$= \cos a \cosh b - i \sin a \sinh b$ ......... (i)

$\cosh(x + iy) = \cos i(x + iy)$

$= \cos(ix - y)$

$= \cos ix \cos y + \sin ix \sin y$

$= \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$ ......... (ii)

கொள்கைப்படி, $\cos(a + ib).\cosh(x + iy) = 1$

$\therefore$ $(\cos a \cosh b - i \sin a \sinh b)(\cosh x \cos y + i \sinh x \sin y)$

$= 1 + i.0$ [(i), (ii) -லிருந்து]

கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த,

$\cos a \cosh b \sinh x \sin y - \sin a \sinh b \cosh x \cos y = 0$

அ - து, $\sin a \sinh b \cosh x \cos y = \cos a \cosh b \sinh x \sin y$

$\therefore \dfrac{\sin a \sinh b}{\cos a \cosh b} = \dfrac{\sinh x \sin y}{\cosh x \cos y}$

அ - து, $\tan a \tanh b = \tanh x \tan y$

**மாதிரிக் கணக்கு 6-21.13.**

$\sin^{-1}(\alpha + i\beta) = u + iv$ **எனில்,**

$\mu^2 - \mu(1 + \alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2 = 0$ **என்பது** $\sin^2 u$, $\cosh^2 v$ **ஆகியவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு என நிறுவுக.**

$\sin^{-1}(\alpha + i\beta) = u + iv$ (கொள்கை)

$\alpha + i\beta = \sin(u + iv)$

$= \sin u \cos iv + \cos u \sin iv$

$= \sin u \cosh v + i \cos u \sinh v$

$$\therefore \quad \alpha = \sin u \cosh v$$
$$\beta = \cos u \sinh v$$

இப்பொழுது,

$$1 + \alpha^2 + \beta^2$$
$$= 1 + \sin^2 u \cosh^2 v + \cos^2 u \sinh^2 v$$
$$= 1 + \sin^2 u \cosh^2 v + (1 - \sin^2 u)(\cosh^2 v - 1)$$
$$= 1 + \sin^2 u \cosh^2 v + \cosh^2 v - 1 - \sin^2 u \cosh^2 v + \sin^2 u$$
$$= \sin^2 u + \cosh^2 v$$

= தீர்வுகளின் கூட்டுத்தொகை

$$\alpha^2 = \sin^2 u \cosh^2 v$$

= தீர்வுகளின் பெருக்குத் தொகை

எனவே, $\sin^2 u$, $\cosh^2 v$ ஆகியவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு,

$\mu^2 - (\sin^2 u + \cosh^2 v)\mu + \sin^2 u \cosh^2 v = 0$ ஆகும்.

அ-து, $\mu^2 - (1 + \alpha^2 + \beta^2)\mu + \alpha^2 = 0$

**மாதிரிக் கணக்கு 6-21.14.**

$\tanh^{-1} x = \sinh^{-1} \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ **என நிறுவுக.**

(செ. ப. 1962 செ.)

$\tanh^{-1} x = y$ என இருக்கட்டும்.

$\therefore \quad \tanh y = x$ ............ (i)

இப்பொழுது,

$$\sinh^{-1} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \sinh^{-1} \frac{\tanh y}{\sqrt{1 - \tanh^2 y}} \qquad \text{[ (i) -லிருந்து ]}$$

$$= \sinh^{-1} \frac{\tanh y}{\sqrt{\operatorname{sech}^2 y}} \qquad \text{[சூத்திரம் (175)-ன் படி]}$$

$$= \sinh^{-1} \frac{\tanh y}{\operatorname{sech} y}$$

$$= \sinh^{-1} (\sinh y)$$

$$= y$$

$$= \tanh^{-1} x$$

## பயிற்சி 6

1. $\frac{1}{2}[\sinh x + \sin x] = x + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots\ldots\ldots \infty$

என நிறுவுக.

2. $\frac{1}{2}[\cosh x + \cos x] = 1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots\ldots\ldots \infty$

என நிறுவுக.

3. **கீழ்வருவனவற்றை நிறுவுக.**

(a) $\underset{\theta \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\sinh\theta - \sin\theta}{\theta^3} = \frac{1}{3}$

(b) $\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\cosh x - \cos x}{x \sin x} = 1$

(c) $\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\tan x + \sinh x - \sin 2x}{x^3} = \frac{11}{6}$

(d) $\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\log(1+x) + e^x - 1 - 2\sinh x}{\log(1-x) - e^{-x} - 1 + 2\cosh x} = -1$

4. $z = e^{i\theta}$ எனில், $\frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} = i \tan\theta$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1947 செ.)

5. $a, b$ மெய் எண்கள், $p = a + ib$, $q = a - ib$ எனில், $p\,e^p + q\,e^q$ ஒரு மெய் எண் என நிறுவுக. (ம. ப. 1968 செ.)

6. $\sinh z$-ன் காலவட்டம் (Period) $2\pi i$ என நிறுவுக.

7. $\cos iy = \cosh y$ என்றும், $\tan iy = i \tanh y$ என்றும் நிறுவுக. (செ. ப. 1970 செ.)

8. **கீழ்வருவனவற்றை நிறுவுக.**

(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ (செ. ப. 1969 ஏ.)

(b) $\tanh(\alpha + \beta) = \frac{\tanh\alpha + \tanh\beta}{1 + \tanh\alpha \cdot \tanh\beta}$

(செ. ப. 1961 செ.)

(c) $\sinh 3x = 3\sinh x + 4\sinh^3 x$ (செ. ப. 1966 செ.)

(d) $\cosh 3x = 4\cosh^3 x - 3\cosh x$ (ம. ப. 1970 செ.)

(e) $\tanh 3x = \frac{3\tanh x + \tanh^3 x}{1 + 3\tanh^2 x}$

(செ. ப. 1964 ஏ.; 1965 செ.)

(ம. ப. 1971 செ.)

(f) $\cosh(x+y)\cosh(x-y) = \cosh^2 x - \sinh^2 y$

(g) $\sin 2\alpha + i \sinh 2\beta = 2\sin(\alpha + i\beta).\ \cos(\alpha - i\beta)$

(h) $\cos 2\alpha + \cosh 2\beta = 2\cos(\alpha + i\beta).\ \cos(\alpha - i\beta)$

(i) $\dfrac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \dfrac{\sinh x}{\cosh x + 1} = \tanh\dfrac{x}{2}$

(செ. ப. 1947 செ.)

9. $n$ ஒரு நேர் முழு எண் எனில்,

(a) $\cosh nx = (\cosh x)^n [1 + nC_2 \tanh^2 x + nC_4 \tanh^4 x + \ldots\ldots\ldots]$

(b) $\sinh nx = (\cosh x)^n [nC_1 \tanh x + nC_3 \tanh^3 x + \ldots\ldots\ldots]$

(c) $\tanh nx = \dfrac{nC_1 \tanh x + nC_3 \tanh^3 x + \ldots\ldots\ldots}{1 + nC_2 \tanh^2 x + nC_4 \tanh^4 x + \ldots\ldots}$

**10. கீழ்வருவனவற்றை நிறுவுக.**

(*a*) $\cosh^5\theta = \dfrac{1}{16}\left[\cosh 5\theta + 5\cosh 3\theta + 10\cosh\theta\right]$

(*b*) $\cosh^6\theta = \dfrac{1}{2^5}\left[\cosh 6\theta + 6\cosh 4\theta + 15\cosh 2\theta + 10\right]$

(*c*) $\sinh^6\theta = \dfrac{1}{2^5}\left[\cosh 6\theta - 6\cosh 4\theta + 15\cosh 2\theta - 10\right]$

(*d*) $\sinh^7\theta = \dfrac{1}{64}\left[\sinh 7\theta - 7\sinh 5\theta + 21\sinh 3\theta - 35\sinh\theta\right]$

**11. கீழ்வருவனவற்றை நிறுவுக.**

(*a*) $\cosh 5\theta = 16\cosh^5\theta - 20\cosh^3\theta + 5\cosh\theta$

(*b*) $\cosh 8\theta = 128\sinh^8\theta + 256\sinh^6\theta + 160\sinh^4\theta + 32\sinh^2\theta + 1$

(*c*) $\dfrac{\sinh 6\theta}{\sinh\theta} = 32\cosh^5\theta - 32\cosh^3\theta + 6\cosh\theta$

(*d*) $\dfrac{\sinh 7\theta}{\sinh\theta} = 64\sinh^6\theta + 112\sinh^4\theta + 56\sinh^2\theta + 7$

12. $\tan \frac{x}{2} = \tanh \frac{x}{2}$ எனில், $\cosh x = \sec x$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1969 செ.)

13. $\tan x = \tanh x$ எனில், $\cos 2x.\ \cosh 2x = 1$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1967 செ.)

14. $y = \log_e \tan \frac{x}{2}$ எனில், $\cosh y = \operatorname{cosec} x$ என நிறுவுக.

(ம. ப. 1968 ஏ.)

15. $\tanh x = \sin \theta$ எனில்,

(i) $\sinh x = \tan \theta$ (செ. ப. 1967 ஏ.)

(ii) $\cosh x = \sec \theta$ என நிறுவுக.

16. $\tan A = \tan \alpha.\ \tanh \beta$, $\tan B = \cot \alpha.\ \tanh \beta$ எனில், $\tan (A + B) = \sinh 2\beta.\ \operatorname{cosec} 2\alpha$ என நிறுவுக.

17. $\tan \theta = \tanh x.\ \cot y$, $\tan \phi = \tanh x.\ \tan y$ எனில்,

$\frac{\sin 2\theta}{\sin 2\phi} = \frac{\cosh 2x + \cos 2y}{\cosh 2x - \cos 2y}$ என நிறுவுக.

**18.** கீழ்வருவனவற்றை மெய், கற்பனைப் பகுதிகளாகப் பிரிக்க.

(*a*) $\sin (\alpha + i\beta)$

(*b*) $\cos (\alpha + i\beta)$ (ம. ப. 1969 செ.)

(*c*) $\cos (i\beta - \alpha)$ (ம. ப. 1971 ஏ.)

(*d*) $e^{\cos (x + iy)}$

(*e*) $\tan (\alpha + i\beta)$ (செ. ப. 1950 மா.; 1951 மா.; 1960 மா.; 1962 ஏ.; 1964 ஏ.; 1967 செ.; 1969 ஏ.; 1969 செ.)

(ம. ப. 1970 ஏ.)

(*f*) $\operatorname{cosec} (\alpha + i\beta)$ (செ. ப. 1951 மா.)

(*g*) $\sec (\alpha + i\beta)$

(*h*) $\cot (\alpha + i\beta)$ (செ. ப. 1965 செ.)

(*i*) $\cosh (\alpha + i\beta)$ (ம. ப. 1969 ஏ.; 1970 செ.)

(*j*) $\operatorname{sech} (\alpha + i\beta)$

(*k*) $\tanh (\alpha + i\beta)$ (செ. ப. 1965 ஏ.; 1969 ஏ.)

(ம. ப. 1971 செ.)

(*l*) $\tanh (1 + i)$ (செ. ப. 1967 ஏ.)

(*m*) $\tanh (2\alpha - 3i\beta)$ (செ. ப. 1968 செ.)

19. $\sin^2 (\alpha + i\beta) + \cos^2 (\alpha + i\beta) = 1$ என நிறுவுக.

(ம. ப. 1968 செ.)

20. $\tan(x+iy) = A + iB$ எனில்,
$\tan(x-iy) = A - iB$ என நிறுவுக. (செ. ப. 1970 ஏ.)

21. $x + iy = a\tan(\alpha + i\beta)$ எனில்,
$\tan 2\alpha = \dfrac{2ax}{a^2 - x^2 - y^2}$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1968 ஏ.)

22. $\sin^{-1}(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos^{-1}(\sqrt{\sin\theta})$
$+ i\sinh^{-1}(\sqrt{\sin\theta})$ என நிறுவுக.

23. $\cos^{-1}(\cos\theta + i\sin\theta)$
$= \sin^{-1}(\sqrt{\sin\theta}) + i\log\left[\sqrt{1+\sin\theta} - \sqrt{\sin\theta}\right]$
என நிறுவுக.

24. $\tan^{-1}(ix) = \dfrac{i}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1947 செ.)

25. $\text{Tan}^{-1}(e^{i\theta}) = \dfrac{n\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{i}{2}\log\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2}\right)$
என நிறுவுக.

26. $\sin(\alpha + i\beta) = x + iy$ எனில்,
(i) $x^2\operatorname{cosec}^2\alpha - y^2\sec^2\alpha = 1$ (ம. ப. 1968 ஏ.)
(ii) $x\operatorname{sech}^2\beta + y^2\operatorname{cosech}^2\beta = 1$ என நிறுவுக.

27. $\sin(\theta + i\phi) = \cos\alpha + i\sin\alpha$ எனில், $\cos^2\theta = \pm\sin\alpha$
என நிறுவுக.

28. $\sin(\theta + i\phi) = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ எனில்,
(i) $\rho^2 = \dfrac{1}{2}\left[\cosh 2\phi - \cos 2\theta\right]$
(ii) $\tan\alpha = \tanh\phi \,.\, \cot\theta$ என நிறுவுக.
(செ. ப. 1962 ஏ.; 1965 செ.) (ம. ப. 1971 ஏ.)
(ம. ப. 1971 செ.)

29. $\sin(\theta + i\phi) = \tan\alpha + i\sec\alpha$ எனில்,
$\cos 2\theta \,.\, \cosh 2\phi = 3$ என நிறுவுக.
(செ. ப. 1963 ஏ.; 1964 செ.)

30. $\cos(x + iy) = \cos\theta + i\sin\theta$ எனில்,
$\sin\theta = \pm\sinh^2 y$ என நிறுவுக.

31. $\cos^{-1}(\alpha + i\beta) = \theta + i\phi$ எனில்,

(i) $\dfrac{\alpha^2}{\cos^2\theta} - \dfrac{\beta^2}{\sin^2\theta} = 1$

(ii) $\dfrac{\alpha^2}{\cosh^2\phi} + \dfrac{\beta^2}{\sinh^2\phi} = 1$ என நிறுவுக.

32. $\cos(a + ib) = x + iy$ எனில்,

(i) $(\cosh b + \cos a)^2 = (1 + x)^2 + y^2$

(செ. ப. 1947; 1967 ஏ.)

(ii) $(\cosh b - \cos a)^2 = (1 - x)^2 + y^2$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1947)

33. $\cos(\theta + i\phi) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ எனில்,

$$\phi = \frac{1}{2}\log_e \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin(\theta + \alpha)}$$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1961 ஏ.; 1965 ஏ.; 1969 செ.)

34. $\cos(\theta + i\phi) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ எனில்,

(i) $2r^2 = \cos 2\theta + \cosh 2\phi$

(ii) $\tan\alpha = -\tan\theta.\tanh\phi$ என நிறுவுக.

35. $\tan(A + iB) = x + iy$ எனில்,

(i) $x^2 + y^2 + 2x\cot 2A = 1$,

(ii) $x^2 + y^2 - 2y\coth 2B = -1$ என நிறுவுக.

36. $\tan(x + iy) = u + iv$ எனில்,

$\dfrac{u}{v} = \dfrac{\sin 2x}{\sinh 2y}$ என நிறுவுக.

37. $\tan(x + iy) = \theta + i\phi$ எனில்,

$\theta^2 + \phi^2 = \dfrac{\cosh^2 y - \cos^2 x}{\cosh^2 y - \sin^2 x}$ என நிறுவுக.

38. A ஒரு குறுங்கோணம், $\tan(x + iy) = \cos A + i\sin A$ எனில்,

(i) $4x = (2n + 1)\pi$

(ii) $\sec A = \cosh 2y$ என நிறுவுக.

39. $\tan(\theta + i\phi) = \cos\alpha + i\sin\alpha$ எனில்,

(i) $\theta = \dfrac{n\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}$

(ii) $\phi = \frac{1}{2} \log \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)$

$= \frac{1}{2} \log (\tan \alpha + \sec \alpha)$ என நிறுவுக.

40. $\tan (\theta + i \phi) = \tan \alpha + i \sec \alpha$ எனில்,

(i) $e^{2\phi} = \pm \cot \frac{\alpha}{2}$

(ii) $2 \theta = n \pi + \frac{\pi}{2} + \alpha$ என நிறுவுக.

41. $\cot (x + i y) = u + i v$ எனில்,

(i) $u^2 + v^2 - 2 u \cot 2x = 1$

(ii) $u^2 + v^2 + 2 v \coth 2y = -1$ என நிறுவுக.

42. $\sin (\theta + i y) = \tan (x + i y)$ எனில்,

$\frac{\tan \theta}{\tanh \phi} = \frac{\sin 2x}{\sinh 2y}$ என நிறுவுக. (செ. ப. 1952; 1957 செ.; 1962 செ.; 1964 ஏ.; 1968 செ.)

43. $\cosh (x + i y) = \cot (u + i v)$ எனில்,

$\frac{\tanh x}{\cot y} = - \frac{\sinh 2v}{\sin 2u}$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1957 மா.)

44. $a, b, c, d$ மெய் எண்கள், $\cosh (a + i b) \cos (c + i d) = 1$ எனில், $\cos b \cos c \cosh a \cosh d + \sin b \sin c \sinh a \sinh d = 1$ என நிறுவுக. (செ. ப. 1946)

45. $\cos^{-1} (\alpha + i \beta) = \theta + i\phi$ எனில்

$\cos^2 \theta, \cosh^2 \phi$ என்பவை $\lambda^2 - \lambda (1 + \alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என நிறுவுக.

46. $x$ ஒரு மெய் எண். கீழ்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\sinh^{-1} x = \log_e (x + \sqrt{x^2 + 1})$

(செ. ப. 1963 ஏ.; 1966 செ.)

(ii) $\cosh^{-1} x = \log_e (x + \sqrt{x^2 - 1})$

(செ. ப. 1967 செ.; 1969 செ.)

(iii) $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \log_e \frac{1+x}{1-x}$ (செ. ப. 1947 செ.; 1962 ஏ.; 1963 செ.; 1964 செ.; 1968 செ.) (ம. ப. 1971 செ.)

(iv) $\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \log_e \frac{x+1}{x-1}$

47. $x > 0$ எனில், $\tanh^{-1} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \log_e x$ என நிறுவுக.

48. $x, y$ என்பவை மெய் எண்கள் எனில்,

$\tanh^{-1} x + \tanh^{-1} y = \tanh^{-1} \frac{x+y}{1+xy}$ என நிறுவுக.

49. $\cosh u = \sec\theta$ எனில், $u = \log_e \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$ என நிறுவுக. (செ. ப. 1959 மா.; 1964 செ.)

50. $\tan \frac{x}{2} = \tanh \frac{y}{2}$ எனில், $y = \log_e \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$ என நிறுவுக.

## விடைகள்

18. (a) $\sin\alpha \cdot \cosh\beta + i\cos\alpha \cdot \sinh\beta$

(b) $\cos\alpha \cdot \cosh\beta - i\sin\alpha \cdot \sinh\beta$

(c) $\cosh\beta \cdot \cos\alpha + i\sinh\beta \cdot \sin\alpha$

(d) $e^{\cos x \cosh y}[\cos(\sin x \sinh y) - i\sin(\sin x \sinh y)]$

(e) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + \cosh 2\beta} + i\frac{\sinh 2\beta}{\cos 2\alpha + \cosh 2\beta}$

(f) $\frac{2(\sin\alpha \cosh\beta - i\cos\alpha \cdot \sinh\beta)}{\cosh 2\beta - \cos 2\alpha}$

(g) $\frac{2(\cos\alpha \cosh\beta + i\sin\alpha \sinh\beta)}{\cos 2\alpha + \cosh 2\beta}$

(h) $\frac{\sin 2\alpha - i\sinh 2\beta}{\cosh 2\beta - \cos 2\alpha}$

(i) $\cosh\alpha\cos\beta + i\sinh\alpha\sin\beta$

(j) $\dfrac{2(\cosh\alpha\cos\beta - i\sinh\alpha\sin\beta)}{\cosh 2\alpha + \cos 2\beta}$

(k) $\dfrac{\sinh 2\alpha + i\sin 2\beta}{\cosh 2\alpha + \cos 2\beta}$

(l) $\dfrac{\sinh 2 + i\sin 2}{\cosh 2 + \cos 2}$

(m) $\dfrac{\sinh 4\alpha - i\sin 6\beta}{\cos 6\beta + \cosh 4\alpha}$

# 7. சிக்கல் எண்களின் மடக்கைகள்

## [Logarithms of Complex Numbers]

### 7.1. வரையறை (Definition)

$w$, $z$ என்பவை இரு சிக்கல் எண்கள்,

$$w = e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots \infty, \text{ எனில்,}$$

$z$ ஆனது $w$-ன் ஓர் இயற்கை மடக்கை (A Natural Logarithm) என அழைக்கப்படுகிறது. இதை $z = \text{Log } w$ என எழுதுகிறோம்.

$z$-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பிற்கு ஒத்ததாக $w$-க்கு ஒரே ஒரு மதிப்புதான் உண்டு. ஆனால், $e^z$ என்பது காலவட்ட ஒழுங்குடையதாக இருப்பதால், $w$-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பிற்கு ஒத்ததாக $z$-க்குப் பல மதிப்புகள் உண்டு. அதாவது, $\text{Log } w$ ஒரு பன்மதிப்புடைச் சார்பு (A Many Valued Function) ஆகும்.

### 7.2. Log $w$-ன் மதிப்புகள்

$w = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta}$. $-\pi < \theta \leqslant \pi$ என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது,

$w = r[\cos(\theta + 2n\pi) + i\sin(\theta + 2n\pi)]$, $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

$z = x + iy$ என்பது $w$-ன் ஓர் இயற்கை மடக்கை எனில்,

$$w = e^z$$

அ-து, $r[\cos(\theta + 2n\pi) + i\sin(\theta + 2n\pi)] = e^{x+iy}$

$$= e^x\, e^{iy}$$

$$= e^x [\cos y + i \sin y]$$ [சூத்திரம் (141)-ன் படி]

$$\therefore \quad r = e^x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

$$y = \theta + 2n\pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

(i)-ல் $r$-ம், $x$-ம் மெய் எண்கள்.

$$\therefore \quad x = \log_e r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(iii)}$$

இங்கே $\log_e r$ என்பது $r$-னுடைய நேபியரின் தனி மடக்கை (Unique Naperian Logarithm of $r$) ஆகும்.

இப்பொழுது,

$$\text{Log } w = \text{Log } r\ (\cos\theta + i\sin\theta) = \text{Log } r\, e^{i\theta}$$

$$= z$$

$$= x + iy$$

$$= \log_e r + i(2n\pi + \theta), \text{ [(i), (ii)-லிருந்து]} \qquad (204)$$

எனவே, ஒரு சிக்கல் எண்ணின் மடக்கை ஆனது $2\pi i$ ஐக் காலவட்டமாகக் (Period) கொண்ட காலவட்ட ஒழுங்குடைய சார்பு (Periodic Function) ஆகும்.

சூத்திரம் (204)-ல் $n = 0$ ஆக இருக்கும் போது, Log $w$-ன் மதிப்பு $(\log_e r) + i\theta$ ஆகும். இம்மதிப்பு Log $w$-ன் முதன் மதிப்பு (Principal Value) என அழைக்கப்படுகிறது. இதை $\log w$ ஆல் குறிக்கிறோம்.

எனவே,

$$\log w = \log (re^{i\theta})$$

$$= (\log_e r) + i\theta \qquad (205)$$

$$\therefore \text{ Log } w = \log w + i\,2n\pi \qquad (206)$$

**துணை முடிவு :**

சூத்திரம் (204)-ல், $r = 1$ எனில்,

$$\text{Log}(\cos\theta + i\sin\theta) = (\log_e 1) + i(\theta + 2n\pi)$$

$$= i(\theta + 2n\pi) \qquad (207)$$

## 7.3. Log $(u + iv)$-ன் மதிப்புகள்

$u + iv = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta \leqslant \pi$ என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $r = \sqrt{u^2 + v^2}$

$$\cos\theta = \frac{u}{r}, \quad \sin\theta = \frac{v}{r}$$

$$\begin{aligned} \text{Log}\,(u + i\,v) &= \text{Log}\, r\, e^{i\theta} \\ &= (\log_e r) + i\,[2\,n\,\pi + \theta] \\ &= \log_e \sqrt{u^2 + v^2} + i\,[2\,n\,\pi + \theta] \end{aligned}$$

அ-து, $\text{Log}\,(u + i\,v) = \frac{1}{2}\log_e (u^2 + v^2) + i\,[2\,n\,\pi + \theta]$, [208]

$$\cos\theta = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \sin\theta = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

**குறிப்பு :**

1. $\text{Log}\,(u + i\,v)$

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\log_e (u^2 + v^2) + i\left[2\,n\,\pi + \tan^{-1}\frac{v}{u}\right] \; u > 0, \text{ எனில்}, \\ &= \frac{1}{2}\log_e (u^2 + v^2) + i\left[2n\pi + \pi + \tan^{-1}\frac{v}{u}\right] \; u < 0 < v, \text{ எனில்}, \\ &= \frac{1}{2}\log_e (u^2 + v^2) + i\left[2n\pi - \pi + \tan^{-1}\frac{v}{u}\right] \; u < 0,\, v < 0, \text{ எனில்}. \end{aligned}\right\} (209)$$

2. $\log\,(u + i\,v)$

$$= \frac{1}{2}\log_e (u^2 + v^2) + i\,\theta, \quad \cos\theta = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

$$\sin\theta = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \qquad (210)$$

3. $u > 0,\ v = 0$ எனில், $r = u$, $\cos\theta = \frac{u}{u} = 1$,

$$\sin\theta = \frac{0}{u} = 0$$

$\therefore \quad \theta = 0$

$\therefore \quad \text{Log}\, u = \log_e u + i\,2\,n\,\pi$ (211)

$\therefore \quad \text{Log}\, 1 = i\,2\,n\,\pi$ (212)

4. $v = 0,\ u = -x,\ x$ ஒரு நேர் எண் எனில்,

$$r = x,\ \cos\theta = \frac{-x}{x} = -1,\ \sin\theta = \frac{0}{x} = 0$$

$$\therefore\ \theta = \pi$$

$$\therefore\ \text{Log}(-x) = \log_e x + i\,[2n\pi + \pi]$$

$$= \log_e x + i\,[2n + 1]\,\pi \qquad (213)$$

$$\therefore\ \text{Log}(-1) = i\,(2n + 1)\,\pi \qquad (214)$$

5. $u = 0,\ v > 0$ எனில்,

$$r = v,\ \cos\theta = \frac{0}{v} = 0,\ \sin\theta = \frac{v}{v} = 1$$

$$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ \text{Log}\,i\,v = \log_e v + i\left[\,2n\pi + \frac{\pi}{2}\right] \qquad (215)$$

$$\therefore\ \text{Log}\,i = i\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (216)$$

6. $u = 0,\ v = -y,\ y$ ஒரு நேர் எண் எனில்,

$$r = y,\ \cos\theta = \frac{0}{y} = 0,\ \sin\theta = \frac{-y}{y} = -1$$

$$\therefore\ \theta = -\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ \text{Log}(-y\,i) = \log_e y + i\left[\,2n\pi - \frac{\pi}{2}\right] \qquad (217)$$

$$\therefore\ \text{Log}\,(-i) = i\left[\,2n\pi - \frac{\pi}{2}\right] \qquad (218)$$

## 7.4. Log $w$ -க்குச் சார்பு விதி (Functional Law for Log w)

$$w_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\,\theta_1},\ -\pi < \theta_1 \leqslant \pi,$$

$$w_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\,\theta_2},\ -\pi < \theta_2 \leqslant \pi$$

என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $w_1\,w_2 = r_1\,r_2\,[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$

$$= r_1\,r_2\,e^{i\,(\theta_1 + \theta_2)} \qquad \text{............ (i)}$$

$$\text{Log } w_1 = \log_e r_1 + i\,[2K_1 \pi + \theta_1] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

$$\text{Log } w_2 = \log_e r_2 + i\,[2K_2 \pi + \theta_2] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(iii)}$$

$$\text{Log } w_1 w_2 = \log_e r_1 r_2 + i\,[2m \pi + (\theta_1 + \theta_2)] \qquad \ldots\ldots\ldots \text{(iv)}$$

(ii), (iii)-லிருந்து,

$$\text{Log } w_1 + \text{Log } w_2$$

$$= \log_e r_1 + \log_e r_2 + i\,[2\,(K_1 + K_2)\,\pi + (\theta_1 + \theta_2)]$$

$$= \log_e r_1 r_2 + i\,[2K \pi + (\theta_1 + \theta_2)],\ K = K_1 + K_2 \qquad \text{(v)}$$

(iv), (v) -லிருந்து, ($\text{Log } w_1 + \text{Log } w_2$)-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பும் $\text{Log } w_1 w_2$ -ன் ஒரு மதிப்பிற்குச் சமம் ; $\text{Log } w_1 w_2$ -ன் ஒவ்வொரு மதிப்பும் ($\text{Log } w_1 + \text{Log } w_2$)-ன் ஒரு மதிப்பிற்குச் சமம்.

இந்தக் கருத்தில்,

$$\text{Log } w_1 w_2 = \text{Log } w_1 + \text{Log } w_2 \qquad (219)$$

இதேபோல்,

$$\text{Log } \frac{w_1}{w_2} = \text{Log } w_1 - \text{Log } w_2 \qquad (220)$$

$$\text{Log } w^n = n \text{ Log } w \qquad (221)$$

என்று நிரூபிக்கலாம்.

**குறிப்பு :**

1. பொது மதிப்புகளுக்குப் பதில் முதன் மதிப்புகளை எடுத்தோமானால், (219)-ம், (220)-ம் உண்மையாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை. ஏனென்றால், $w_1$, $w_2$ ஆகியவற்றின் வீச்சுகளின் (வீச்சங்களின்) முதன் மதிப்புகளின் கூட்டுத்தொகை (Sum) அல்லது வேறுபாடு (Difference) ஆனது $-\pi$-க்கும் $\pi$-க்கும் இடையே இருக்கலாம் அல்லது இல்லாமலும் இருக்கலாம்.

2. சூத்திரம் (221)-ல் $n \text{ Log } w$-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பும் $\text{Log } w^n$ -ன் ஒரு மதிப்பிற்குச் சமம்; ஆனால், $\text{Log } w^n$ -ன் ஒவ்வொரு மதிப்பும் $n \text{ Log } w$ -ன் ஒரு மதிப்பிற்குச் சமம் என்பது உண்மையல்ல.

சான்றாக, $\text{Log } i^2 = \text{Log } (-1) = i\,(2n + 1)\,\pi$

[சூத்திரம் (214)-ன் படி.]

ஆனால், $2 \text{ Log } i = 2\,i \left( 2K \pi + \dfrac{\pi}{2} \right)$

[சூத்திரம் (216)-ன் படி.]

$$= i\,(4K\,\pi + \pi)$$
$$= i\,(4K + 1)\,\pi$$

எனவே, 2 Log $i$-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பும் Log $i^2$-ன் ஒரு மதிப்பிற்குச் சமம் ; ஆனால் Log $i^2$-ன் சில மதிப்புகள்தாம் (Not all) 2 Log $i$-ன் மதிப்புகளாக உள்ளன.

## மாதிரிக் கணக்குகள்

**மாதிரிக் கணக்கு 7-5.1.**

Log (— 3)-ன் பொது மதிப்பைக் காண்க.

(செ. ப. 1970 ஏ.)

Log $(-3) = x + iy$ என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $e^{x+iy} = -3$

அ - து, $e^x\, e^{iy} = 3\,[\cos \pi + i \sin \pi]$

அ - து, $e^x\,[\cos y + i \sin y] = 3\,[\cos (2n+1)\,\pi + i \sin (2n+1)\,\pi]$, $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

மெய், கற்பனைப் பகுதிகளை முறையே சமப்படுத்த,

$e^x = 3.$ அ - து, $x \equiv \log_e 3$

$y = (2n+1)\,\pi$

$$\therefore \text{Log}\,(-3) = x + iy$$
$$= (\log_e 3) + i\,(2n+1)\,\pi$$

**மாதிரிக் கணக்கு 7-5.2.**

Log sin $(x + iy)$ ஐ மெய், கற்பனைப் பகுதிகளாகப் பிரிக்க.

$$\sin (x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$$
$$= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$
$= u + iv$ என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது,

$$u^2 + v^2 = \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y$$
$$= (1 - \cos^2 x) \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y$$
$$= \cosh^2 y - \cos^2 x\,(\cosh^2 y - \sinh^2 y)$$
$= \cosh^2 y - \cos^2 x$ [சூத்திரம் (172)-ன் படி]

$$= \frac{1+\cosh 2y}{2} - \frac{(1+\cos 2x)}{2}$$

[சூத்திரம் (191)-ன் படி]

$$= \frac{\cosh 2y - \cos 2x}{2}$$

$$\frac{v}{u} = \frac{\cos x \sinh y}{\sin x \cosh y}$$

$$= \tanh y \cot x$$

$$\text{Log} \sin (x + i y)$$

$$= \text{Log} (u + i v)$$

$$= \frac{1}{2} \log_e (u^2 + v^2) + i \left[ 2n\pi + \tan^{-1} \frac{v}{u} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \log_e \left[ \frac{\cosh 2y - \cos 2x}{2} \right]$$

$$+ [ i\, 2n\pi + \tan^{-1} (\tanh y \cot x) ]$$

**மாதிரிக் கணக்கு 7-5.3.**

$\log \cos (x - i y) = A + i B$ எனில்,

$$A = \frac{1}{2} \log_e \left[ \frac{\cosh 2y + \cos 2x}{2} \right],$$

$B = \tan^{-1} (\tan x \tanh y)$ என நிறுவுக.

$\log \cos (x - i y) = A + i B$ (கொள்கை)

$$\therefore \quad \cos (x - i y) = e^{A + i B}$$

அ-து, $\cos x \cos i y + \sin x \sin i y = e^{A} \cdot e^{i B}$

அ-து, $\cos x \cosh y + i \sin x \sinh y$

$= e^{A} [ \cos B + i \sin B ]$ [சூத்திரம் (141)-ன் படி]

மெய், கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த,

$$e^{A} \cos B = \cos x \cosh y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

$$e^{A} \sin B = \sin x \sinh y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

(i) ஐயும், (ii) ஐயும் வர்க்கப் படுத்திக் கூட்ட,

$$e^{2A} = \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y$$

$$= \cos^2 x \cosh^2 y + (1 - \cos^2 x) \sinh^2 y$$

$$= \cos^2 x\,(\cosh^2 y - \sinh^2 y) + \sinh^2 y$$

$$= \cos^2 x + \sinh^2 y \qquad \text{[சூத்திரம் (172)-ன் படி]}$$

$$= \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{\cosh 2y - 1}{2}$$

[சூத்திரம் (191)-ன் படி]

$$= \frac{\cosh 2y + \cos 2x}{2}$$

$$\therefore \quad 2A = \log_e\left[\frac{\cosh 2y + \cos 2x}{2}\right]$$

அ-து, $A = \frac{1}{2}\log_e\left[\frac{\cosh 2y + \cos 2x}{2}\right]$

(ii) ஐ (i) ஆல் வகுக்க,

$$\frac{e^A \sin B}{e^A \cos B} = \frac{\sin x \sinh y}{\cos x \cosh y}$$

அ-து, $\tan B = \tan x \tanh y$

$$\therefore \quad B = \tan^{-1}[\tan x \tanh y]$$

**மாதிரிக் கணக்கு 7-5.4.**

$\log\frac{a + ib}{a - ib} = 2i \tan^{-1}\frac{b}{a}$ என நிறுவுக.

(ம. ப. 1971 ஏ.)

$a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது,

$a - ib = r(\cos\theta - i\sin\theta) = re^{-i\theta}$,

$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$.

$$\frac{a + ib}{a - ib} = \frac{re^{i\theta}}{re^{-i\theta}} = e^{2i\theta} = 1.\, e^{i(2\theta)}$$

சூத்திரம் (205)-ன் படி,

$$\log\frac{a + ib}{a - ib} = (\log_e 1) + i \,.\, 2\theta$$

$$= i\, 2\theta$$

$$= 2i \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 7-5.5.**

$\log \tan \left(\frac{\pi}{4} + i\, \frac{x}{2}\right) = i \tan^{-1} (\sinh x)$ என நிறுவுக.

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + i\,\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + i\,\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + i\,\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4} + i\,\frac{x}{2}\right)\;\cos\left(\frac{\pi}{4} - i\,\frac{x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{4} + i\,\frac{x}{2}\right)\;\cos\left(\frac{\pi}{4} - i\,\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left[\left(\frac{\pi}{4} + i\,\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{4} - i\,\frac{x}{2}\right)\right] + \sin\left[\left(\frac{\pi}{4} + i\,\frac{x}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{4} - i\,\frac{x}{2}\right)\right]}{\cos\left[\left(\frac{\pi}{4} + i\,\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{4} - i\,\frac{x}{2}\right)\right] + \cos\left[\left(\frac{\pi}{4} + i\,\frac{x}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{4} - i\,\frac{x}{2}\right)\right]}$$

$$= \frac{\sin \frac{\pi}{2} + \sin i x}{\cos \frac{\pi}{2} + \cos i x}$$

$$= \frac{1 + i \sinh x}{\cosh x}$$

$$= \operatorname{sech} x + i \tanh x$$

$= u + i\, v$ என இருக்கட்டும்.

$$\therefore \quad \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + i\,\frac{x}{2}\right)$$

$$= \log (u + i\, v)$$

$$= \frac{1}{2} \log_e (u^2 + v^2) + i \tan^{-1} \frac{v}{u}.$$

[சூத்திரம் (210)-ன் படி]

$$= \frac{1}{2} \log_e (\operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x) + i \tan^{-1} \frac{\tanh x}{\operatorname{sech} x}$$

$$= \frac{1}{2} \log_e 1 + i \tan^{-1} (\sinh x) \qquad \text{[சூத்திரம் (175)-ன் படி]}$$

$$= i \tan^{-1} (\sinh x)$$

**மாதிரிக் கணக்கு 7-5.6.**

$\tan \log (a + i b) = x + i y$, $x^2 + y^2 \neq 1$ எனில்,

$2x = (1 - x^2 - y^2) \tan \log_e (a^2 + b^2)$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1953 செ.)
(செ. ப. 1955)
(செ. ப. 1956 மா.)

$$\log (a + i b) = \frac{1}{2} \log_e (a^2 + b^2) + i \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

[சூத்திரம் (210)-ன் படி]

$= u + i v$ என இருக்கட்டும்.

கொள்கைப்படி, $\tan [\log (a + i b)] = x + i y$

அ-து, $\tan (u + i v) = x + i y$

$\therefore \quad \tan (u - i v) = x - i y$

இப்பொழுது,

$$\tan \log_e (a^2 + b^2)$$

$$= \tan 2u$$

$$= \tan [(u + i v) + (u - i v)]$$

$$= \frac{\tan (u + i v) + \tan (u - i v)}{1 - \tan (u + i v) \tan (u - i v)}$$

$$= \frac{x + i y + x - i y}{1 - (x + i y)(x - i y)}$$

$$= \frac{2x}{1 - (x^2 + y^2)}$$

$$\therefore 2x = (1 - x^2 - y^2) \tan \log_e (a^2 + b^2)$$

## பயிற்சி 7 (அ)

கீழ்வருவனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

1. $\text{Log}\,(1+i)$
2. $\text{Log}\,3$
3. $\text{Log}\,(-4)$
4. $\text{Log}\,(-e)$
5. $\text{Log}\,(-2i)$
6. $\text{Log}\,\sqrt{i}$

பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

7. $\log\,(1+i\tan\alpha) = (\log_e\sec\alpha) + i\,\alpha$, $\alpha$ ஒரு குறுங்கோணம்.

8. $\log\,(1+\cos\theta+i\sin\theta) = \left(\log_e 2\cos\dfrac{\theta}{2}\right) + i\,\dfrac{\theta}{2},$

$$-\pi < \frac{\theta}{2} \leqslant \pi$$

9. $\log\dfrac{1}{1-e^{i\theta}} = \log_e\left(\dfrac{1}{2}\,\text{cosec}\,\dfrac{\theta}{2}\right) + i\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}\right)$

10. $i\log\dfrac{x-i}{x+i} = \pi - 2\tan^{-1}x$

11. $\tan\left\{i\log\dfrac{a-ib}{a+ib}\right\} = \dfrac{2ab}{a^2-b^2}$

12. $\log\dfrac{\sin(x+iy)}{\sin(x-iy)} = 2i\tan\ (\cot x\tanh y)$

13. $\log\dfrac{\cos(x-iy)}{\cos(x+iy)} = 2i\tan^{-1}(\tan x\tanh y)$

14. $\log\dfrac{\cos\theta+i\sin\theta-1}{\cos\theta+i\sin\theta+1} = \left(\log_e\tan\dfrac{\theta}{2}\right) + i.\dfrac{\pi}{2}$

15. $\text{Log}\ \cos(x+iy)$

$$= \frac{1}{2}\log_e\frac{(\cosh 2y+\cos 2x)}{2}$$

$$-\,i\tan^{-1}(\tan x\tanh y) + i\,2n\pi$$

16. $\text{Log}\left(\dfrac{1 + i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha}\right) = 2\, i\, (n\, \pi + \alpha)$

17. $\text{Log}\left[\dfrac{(a - b) + i\,(a + b)}{(a + b) + i\,(a - b)}\right]$

$$= i\left[2\, n\, \pi + \tan^{-1} \frac{2\, ab}{a^2 - b^2}\right]$$

18. $\text{Log}\, [\text{Log}\, (\cos \theta + i \sin \theta)] = \log_e (\theta + 2\, n\, \pi) +$

$$i\left[\frac{\pi}{2} + 2m\, \pi\right]$$

19. $\log \sin (\theta + i\, \phi) = \text{L} + i\, \text{B}$ எனில்,

$2\, e^{2\,\text{L}} = \cosh 2\, \phi - \cos 2\, \theta$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1953 செ.)

20. $\log \cos (\theta - i\, \phi) = \text{A} + i\, \text{B}$ எனில்,

$\phi = \dfrac{1}{2} \log_e \dfrac{\sin (\theta + \text{B})}{\sin (\theta - \text{B})}$ என நிறுவுக.

21. $\log (e^{i\,\alpha} + e^{i\,\beta}) = x + i\, y$ எனில், $x, y$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க. (ம. ப. 1969 செ.)

22. $\log\, [\log\, (1 + i)] = \alpha + i\, \beta$ எனில்,

$e^{\pi \cot \beta} = 4$ என நிறுவுக.

23. $\log\, [\log\, (x + i\, y)] = a + i\, b$ எனில்,

$y = x \tan\, [\tan b.\ \log_e (\sqrt{x^2 + y^2})\,]$ என நிறுவுக.

(செ. ப.)

## விடைகள்

1. $\dfrac{1}{2} \log_e 2 + i\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\, n\, \pi\right)$

2. $\log_e 3 + i\, 2\, n\, \pi$

3. $\log_e 4 + i\, (2\, n + 1)\, \pi$

4. $1 + i\, (2\, n + 1)\, \pi$

5. $\log_e 2 + i\left(2\, n\, \pi - \dfrac{\pi}{2}\right)$

6. $i(8n+1)\frac{\pi}{4}$

21. $x = \log_e\left[2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]$ ; $y = \frac{\alpha+\beta}{2}$

## 7.6. மடக்கைத் தொடர் (The Logarithmic Series)

$x$ ஒரு மெய் எண், $-1 < x \leqslant 1$ எனில்

$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots\ldots\ldots\infty$, என்ற தொடர் ஒருங்கும் தன்மை (குவியும் தன்மை) உடையது என்றும், அதன் கூட்டுத் தொகை $\log_e(1+x)$ என்றும் அறிவோம்.

$z$ ஒரு சிக்கல் எண், $|z| < 1$ எனில்,

$z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots\ldots\ldots\ldots\infty$, என்ற தொடர் ஒருங்கும் தன்மை உடையது என்றும், அதன் கூட்டுத் தொகை $\text{Log}(1+z)$-ன் முதன் மதிப்பு (Principal Value) என்றும் நிரூபிக்கலாம். எனவே,

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots\ldots\ldots\infty \quad (222)$$

இந்தத் தொடருக்கு மடக்கைத் தொடர் (The Logarithmic Series) என்பது பெயர். முடிவு (222) ஆனது $|z| = 1$, $z \neq -1$ ஆகவுள்ள $z$-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் உண்மையானது.

$\text{Log}(1+z) = \log(1+z) + i\,2n\pi$ என்பது உண்மையாகையால்,

$$\text{Log}(1+z) = 2n\pi i + z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots\ldots\infty \quad (223)$$

## 7.7. $z^w$-ன் வரையறை

$z\,(\neq 0)$, $w$ என்பவை இரு சிக்கல் எண்கள் எனில், $z^w$ என்ற சார்பானது,

$$z^w = e^{w\,\text{Log}\,z} \quad (224)$$

என்ற தொடர்பால் வரையறுக்கப்படுகிறது.

$\text{Log}\,z$ ஆனது ஒரு பன்மதிப்புடைச் சிக்கல் சார்பு (Many-Valued Complex Function) ஆகும். எனவே, $z^w$-ம் ஒரு பன்மதிப்புடைச் சிக்கல் சார்பு ஆகும்.

இப்பொழுது, $z^w = e^{w\,\text{Log}\,z} = e^{w(\log z + i\,2n\pi)}$

இதில் $n = 0$ என்று இடும்போது கிடைக்கும் $z^w$-ன் மதிப்பானது $z^w$-ன் முதன் மதிப்பு (Principal Value) என அழைக்கப்படுகிறது.

ஆகவே, $z^w$-ன் முதன் மதிப்பு

$$= e^{w \log z}$$

$$= 1 + w \log z + \frac{(w \log z)^2}{2!} + \frac{(w \log z)^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty \quad (225)$$

முதன் மதிப்புகளை மாத்திரம் கருத்தில் கொண்டோமானால்,

$$z^{w_1}\, z^{w_2} = e^{w_1 \log z}\, e^{w_2 \log z}$$

$$= e^{w_1 \log z + w_2 \log z}$$

$$= e^{(w_1 + w_2) \log z}$$

$$= z^{w_1 + w_2} \quad (226)$$

**7.8. $(x + iy)^{u + iv}$ஐ மெய், கற்பனைப் பகுதிகளாகப் பிரித்தல்.**

$u + iv = w,$

$x + iy = z$

$= r(\cos\theta + i \sin\theta),\ r \neq 0$ என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \sin\theta = \frac{y}{r}$

$(x + iy)^{u + iv}$

$= z^w$

$= e^{w \operatorname{Log} z}$

$= e^{(u + iv)\,[\log_e r + i(\theta + 2n\pi)]}$, $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

$= e^{u \log_e r - v(\theta + 2n\pi) + i[v \log_e r + u(\theta + 2n\pi)]}$

$= e^{u \log_e r - v(\theta + 2n\pi)}\, e^{i[v \log_e r + u(\theta + 2n\pi)]}$

$= e^{u \log_e r - v(\theta + 2n\pi)} \times$

$[\cos\{v \log_e r + u(\theta + 2n\pi)\} + i \sin\{v \log_e r + u(\theta + 2n\pi)\}]$

$\therefore\ (x + iy)^{u + iv}$-ன் மெய்ப் பகுதி

$= e^{u \log_e r - v(\theta + 2n\pi)} \cos[v \log_e r + u(\theta + 2n\pi)]$

$$= e^{u \log_e r}\, e^{-v(\theta + 2n\pi)} \cos [\, v \log_e r + u(\theta + 2n\pi]$$

$$= r^u\, e^{-v(\theta + 2n\pi)} \cos (\, v \log_e r + u(\theta + 2n\pi)\,]$$

கற்பனைப் பகுதி

$$= e^{u \log_e r - v(\theta + 2n\pi)} \sin [\, v \log_e r + u(\theta + 2n\pi)\,]$$

$$= r^u\, e^{-v(\theta + 2n\pi)} \sin [\, v \log_e r + u(\theta + 2n\pi)\,]$$

குறிப்பு :

1. $\left| (x + iy)^{u + iv} \right| = e^{u \log_e r - v(\theta + 2n\pi)}$

$$= r^u\, e^{-v(\theta + 2n\pi)}$$

2. $(x + iy)^{u + iv}$-ன் வீச்சு (வீச்சம்)

$= v \log_e r + u(\theta + 2n\pi) + 2K\pi$, K ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

3. $(x + iy)^{u + iv}$-ன் முதன் மதிப்பு

$$= e^{u \log_e r - v\theta} [\cos (v \log_e r + u\theta) + i \sin (v \log_e r + u\theta)],$$

$$-\pi < \theta \leqslant \pi$$

$$= r^u e^{-v\theta} [\cos (v \log_e r + u\theta) + i \sin (v \log_e r + u\theta)]$$

### 7.9. டிமாவியர் தேற்றத்தின் பொது வடிவம் (General form of De Moivre's Theorem)

$z$, $n$ என்பவை இரு சிக்கல் எண்கள் எனில், $\cos nz + i \sin nz$ என்பது $(\cos z + i \sin z)^n$-ன் ஒரு மதிப்பாகும்.

**நிறுவல் :**

$$(\cos z + i \sin z)^n$$

$$= e^{n \operatorname{Log} (\cos z + i \sin z)} \qquad \text{(வரையறையின்படி)}$$

$$= e^{ni(z + 2K\pi)}, \text{ K ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்}$$

$$= e^{i(nz + 2Kn\pi)}$$

$$= \cos(nz + 2Kn\pi) + i\sin(nz + 2Kn\pi)$$

எனவே, $\cos nz + i\sin nz$ என்பது $(\cos z + i\sin z)^n$-ன் ஒரு மதிப்பாகும்.

## 7.10. ஈருறுப்புத் தொடர் (Binomial Series)

$z$ ஒரு சிக்கல் எண், $|z| < 1$, $m$ ஒரு மெய் எண் என்று இருந்தால், அல்லது $|z| = 1$, $m > 0$ என்று இருந்தால், அல்லது $|z| = 1$, $z \neq -1$, $0 > m > -1$ என்று இருந்தால்,

$$1 + \frac{m}{1!}z + \frac{m(m-1)}{2!}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}z^3 + \ldots\ldots \infty,$$

என்ற தொடர் ஒருங்கும் தன்மை (குவியும் தன்மை) உடையது என்றும், $(1+z)^m$-ன் முதன் மதிப்பு அதன் கூட்டுத்தொகை என்றும் நிறுவலாம். அதாவது,

$(1+z)^m$-ன் முதன் மதிப்பு

$$= e^{m\log(1+z)}$$

$$= 1 + \frac{m}{1!}z + \frac{m(m-1)}{2!}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}z^3 + \ldots\ldots\ldots \infty \qquad (227)$$

இத்தொடருக்கு ஈருறுப்புத் தொடர் (Binomial Series) என்பது பெயர்.

## 7.11. $\text{Log}_a z$-ன் வரையறை

$a\,(\neq 0)$, $z$, $w$ என்பவை சிக்கல் எண்கள், $a^w = z$ எனில், $w$ ஆனது '$a$' என்ற அடிக்கு (Base) $z$-ன் மடக்கை (Logarithm of $z$ to the base $a$) என அழைக்கப்படுகிறது.

இதை $w = \text{Log}_a z$ என எழுதுகிறோம்.

## 7.12. $\text{Log}_a z$-ன் மதிப்புகள்

$\text{Log}_a z = w$ என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $a^w = z$

அ-து, $e^{w\,\text{Log}\,a} = z$

$$\therefore \quad \text{Log}\,z = w\,\text{Log}\,a$$

$$\therefore \qquad w = \frac{\text{Log } z}{\text{Log } a}$$

அ-து, $$\text{Log}_a z = \frac{\text{Log } z}{\text{Log } a} \qquad (228)$$

Log $z$, Log $a$ என்பவைகளில் ஒவ்வொன்றுக்கும் எண்ணற்ற மதிப்புகள் (Infinite Number of Values) உண்டு. எனவே, $\text{Log}_a z$-க்கு இரட்டை எண்ணற்ற மதிப்புகள் (Doubly Infinite set of Values) உண்டு.

## மாதிரிக் கணக்குகள்

**மாதிரிக் கணக்கு 7-13.1.**

$i^i$ ன் பொது மதிப்பைக் காண்க. (செ. ப. 1949 செ.)
(செ. ப. 1969 ஏ.)
(செ. ப. 1970 செ.)

$$i^i = e^{i \text{ Log } i} \qquad \text{(வரையறையின்படி)}$$

$$= e^{i\, i\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}$$, $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம், [சூத்திரம் (216)-ன் படி]

$$= e^{-\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= e^{-(4n+1)\frac{\pi}{2}}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 7-13.2.**

$i^{\alpha + i\beta} = \alpha + i\beta$ எனில், $\alpha^2 + \beta^2 = e^{-(4n+1)\pi\beta}$ என நிறுவுக.

$$\alpha + i\beta = i^{\alpha + i\beta} \qquad \text{(கொள்கை)}$$

$$= e^{(\alpha + i\beta)\text{ Log } i} \qquad \text{(வரையறையின் படி)}$$

$$= e^{(\alpha + i\beta)\, i\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}$$, $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம், [சூத்திரம் (216)-ன் படி]

$$= e^{(\alpha + i\beta)\,(4n+1)\frac{\pi}{2} i}$$

$$= e^{-\beta(4n+1)\frac{\pi}{2} + i\alpha(4n+1)\frac{\pi}{2}}$$

$$= e^{-\beta(4n+1)\frac{\pi}{2}}\; e^{i\alpha(4n+1)\frac{\pi}{2}}$$

$$= e^{-\beta(4n+1)\frac{\pi}{2}}.$$

$$\left[\cos\alpha(4n+1)\frac{\pi}{2} + i\sin\alpha(4n+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

மெய், கற்பனைப் பகுதிகளை முறையே சமப்படுத்த,

$$\alpha = e^{-\beta(4n+1)\frac{\pi}{2}}\cos\alpha(4n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\beta = e^{-\beta(4n+1)\frac{\pi}{2}}\sin\alpha(4n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 = e^{-\beta(4n+1)\pi}.$$

$$\left[\cos^2\alpha(4n+1)\frac{\pi}{2} + \sin^2\alpha(4n+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= e^{-\beta(4n+1)\pi}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 7-13.3.**

$$i^{i^{i^{i^{\cdots\cdots\infty}}}} = \alpha + i\beta$$ **எனில், முதன் மதிப்புகளை மாத்திரம் கருத்தில் கொண்டு,** $\alpha^2 + \beta^2 = e^{-\pi\beta}$, $\tan\frac{\pi\alpha}{2} = \frac{\beta}{\alpha}$ **என நிறுவுக.**

(செ. ப. 1951 செ.

$$\alpha + i\beta = i^{i^{i^{i^{\cdots\cdots\infty}}}} \quad \text{(கொள்கை)}$$

$$= i^{\alpha + i\beta}$$

$$= e^{(\alpha + i\beta)\,\mathrm{Log}\, i} \quad \text{(வரையறையின்படி)}$$

$$= e^{(\alpha + i\beta)(4n+1)\frac{\pi}{2} i}$$ , $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

$$= e^{(\alpha + i\beta)\frac{\pi}{2} i} \quad \text{(முதன் மதிப்பை எடுக்க)}$$

$$= e^{-\frac{\pi}{2}\beta + \frac{\pi}{2}\alpha i}$$

$$= e^{-\frac{\pi}{2}\beta} \cdot e^{\frac{\pi}{2}\alpha i}$$

$$= e^{-\frac{\pi}{2}\beta}\left[\cos\frac{\pi}{2}\alpha + i\sin\frac{\pi}{2}\alpha\right]$$

மெய், கற்பனைப் பகுதிகளை முறையே சமப்படுத்த,

$$\alpha = e^{-\frac{\pi}{2}\beta}\cos\frac{\pi}{2}\alpha$$

$$\beta = e^{-\frac{\pi}{2}\beta}\sin\frac{\pi}{2}\alpha$$

$$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 = e^{-\pi\beta}\left[\cos^2\frac{\pi}{2}\alpha + \sin^2\frac{\pi}{2}\alpha\right]$$

$$= e^{-\pi\beta}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}\beta}\sin\frac{\pi}{2}\alpha}{e^{-\frac{\pi}{2}\beta}\cos\frac{\pi}{2}\alpha}$$

$$= \tan\frac{\pi}{2}\alpha$$

**மாதிரிக் கணக்கு 7-13.4.**

**$(1+i)^{1+i}$-ன் மட்டுகளில் ஒன்றுக்குக் குறைவானவைகளின் கூட்டுத் தொகை** $\dfrac{e^{\frac{3\pi}{4}}\operatorname{cosech}\pi}{\sqrt{2}}$ **என நிறுவுக.** (செ. ப.)

$(1+i)^{1+i}$

$= e^{(1+i)\operatorname{Log}(1+i)}$ [வரையறையின்படி]

$= e^{(1+i)\operatorname{Log}\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

$= e^{(1+i)\left[\log_e\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)\right]}$, $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்

$= e^{\log_e\sqrt{2}-\left(2n\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\left[\log_e\sqrt{2}+\left(2n\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right]}$

$= e^{\log_e\sqrt{2}-\left(2n\pi+\frac{\pi}{4}\right)}\times e^{i\left[\log_e\sqrt{2}+\left(2n\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right]}$

$\therefore$ $(1+i)^{1+i}$-ன் மட்டு

$= e^{\log_e\sqrt{2}-\left(2n\pi+\frac{\pi}{4}\right)}$

$= e^{\log_e\sqrt{2}}\,e^{-\left(2n\pi+\frac{\pi}{4}\right)}$

$= \sqrt{2}\;e^{-\frac{\pi}{4}-2n\pi}$, $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

$n$ ஓர் எதிர் முழு எண் எனில், $\sqrt{2}\;e^{-\frac{\pi}{4}-2n\pi}>1$

$n=0$ அல்லது ஒரு நேர் முழு எண் எனில்,

$$\sqrt{2}\;e^{-\frac{\pi}{4}-2n\pi}<1$$

$\therefore\ (1+i)^{1+i}$-ன் மட்டுகளில் (Moduli) 1-க்குக் குறைவானவைகளின் கூட்டுத் தொகை

$$= \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}} + \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}-2\pi} + \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}-4\pi} + \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}-6\pi} + \ldots\ldots \infty$$

$$= \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}}\left[1 + e^{-2\pi} + e^{-4\pi} + e^{-6\pi} + \ldots\ldots\ldots \infty\right]$$

$$= \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi}}\right)$$

$$= \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\pi}}{(e^{\pi}-e^{-\pi})}$$

$$= \sqrt{2}\, \frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{2\sinh \pi}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{\frac{3\pi}{4}} \operatorname{cosech} \pi$$

**மாதிரிக் கணக்கு 7-13.5.**

$\dfrac{(1+i)^{p+iq}}{(1-i)^{p-iq}} = \alpha + i\beta$ எனில், $\frac{1}{2}p\pi + q \log_e 2$ **ஆனது**

$\tan^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$ **-ன் ஒரு மதிப்பு என நிறுவுக.** (ம. ப. 1971 ஏ.)

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$ என அறிவோம்.

$\therefore\ \log(1+i) = \frac{1}{2}\log_e 2 + i\frac{\pi}{4}$ [சூத்திரம் (205)-ன் படி]

இதேபோல் $\log(1-i) = \frac{1}{2}\log_e 2 - i\frac{\pi}{4}$

$$\alpha + i\beta = \frac{(1+i)^{p+iq}}{(1-i)^{p-iq}} \qquad \text{(கொள்கை)}$$

$$= \frac{e^{(p+iq)\log(1+i)}}{e^{(p-iq)\log(1-i)}}$$

[முதன் மதிப்புகளை மட்டும் கருத்தில் கொள்ள]

$$= \frac{e^{(p+iq)\left[\frac{1}{2}\log_e 2 + i\frac{\pi}{4}\right]}}{e^{(p-iq)\left[\frac{1}{2}\log_e 2 - i\frac{\pi}{4}\right]}}$$

$$= \frac{e^{\frac{p}{2}\log_e 2 - \frac{\pi}{4}q + i\left[\frac{q}{2}\log_e 2 + \frac{\pi}{4}p\right]}}{e^{\frac{p}{2}\log_e 2 - \frac{\pi}{4}q - i\left[\frac{q}{2}\log_e 2 + \frac{\pi}{4}p\right]}}$$

$$= e^{2i\left[\frac{q}{2}\log_e 2 + \frac{\pi}{4}p\right]}$$

$$= e^{i\left[q\log_e 2 + \frac{\pi}{2}p\right]}$$

$$= \cos\left(q\log_e 2 + \frac{\pi}{2}p\right) + i\sin\left(q\log_e 2 + \frac{\pi}{2}p\right)$$

மெய், கற்பனைப் பகுதிகளை முறையே சமப்படுத்த,

$$\alpha = \cos\left(q\log_e 2 + \frac{\pi}{2}p\right)$$

$$\beta = \sin\left(q\log_e 2 + \frac{\pi}{2}p\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\beta}{\alpha} = \tan\left(q\log_e 2 + \frac{\pi}{2}p\right)$$

அ-து, $\tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha} = q\log_e 2 + \frac{\pi}{2}p$

**மாதிரிக் கணக்கு 7-13.6.**

$Log_4(-2)$-ன் பொது மதிப்பைக் காண்க.

$$Log_4(-2) = \frac{Log(-2)}{Log\,4}$$ [சூத்திரம் (228)-ன் படி]

$$= \frac{\log_e 2 + i(2n+1)\pi}{\log_e 4 + i\,2m\,\pi},$$ $m, n$ முழு எண்கள் அல்லது பூச்சியம், [சூத்திரங்கள் (213), (211)-ன் படி]

$$= \frac{\log_e 2 + i(2n+1)\pi}{2\log_e 2 + i\,2m\,\pi}$$

$$= \frac{[\log^e 2 + i(2n+1)\pi]\,[\log_e 2 - im\,\pi]}{2\,[\log_e 2 + im\,\pi]\,[\log_e 2 - im\,\pi]}$$

$$= \frac{(\log_e 2)^2 + m(2n+1)\pi^2 + i\,[\log_e 2)\,(2n+1-m)]}{2\,[(\log_e 2)^2 + m^2\pi^2}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 7-13.7.**

$Log_i\, i$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$Log_i\, i = w$ என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது,

$$i = i^w$$

$$= e^{w\,Log\,i}$$ (வரையறையின் படி)

$$= e^{w\,i\,(4n+1)\frac{\pi}{2}}$$, $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம், [ சூத்திரம் (216)-ன் படி ]

$$\therefore\ w\,i\,(4n+1)\frac{\pi}{2} = Log\,i$$

$$= i\,(4m+1)\frac{\pi}{2},$$ $m$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம், [ சூத்திரம் (216)-ன் படி ]

$$\therefore\ w = \frac{4m+1}{4n+1},$$ $m, n$ முழு எண்கள் அல்லது பூச்சியம்.

## பயிற்சி 7 (ஆ)

**பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.**

1. $1^{1+i} = e^{-2K\pi}$

2. $(1+i)^{i} = e^{\left(-2n+\frac{1}{4}\right)\pi} \operatorname{cis}\left(\frac{1}{2}\log_e 2\right)$

3. $a^{i} = e^{-2n\pi} \operatorname{cis}(\log_e a)$

4. $i^{a} = \operatorname{cis}\left[\frac{(4K+1)\pi}{2} a\right]$

5. $\sin\left(\log i^{i}\right) = -1$

6. $(-i)^{-i} = e^{\frac{1}{2}(4n-1)\pi}$

7. $(1+i\tan\alpha)^{-i} = e^{(\alpha+2n\pi)} \operatorname{cis}(\log_e \cos\alpha)$

8. $\left(i^{i}\right)^{i} = \cos\theta - i\sin\theta$ எனில், $\theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}$ என நிறுவுக.

9. $i^{i^{i}} = \cos\theta + i\sin\theta$ எனில்,

   $\theta = \frac{(4m+1)\pi}{2} \quad e^{-(4n+1)\frac{\pi}{2}}$ என நிறுவுக.

10. $i^{\log(1+i)}$-ன் முதன் மதிப்பினுடைய மெய்ப் பகுதி $e^{-\frac{1}{8}\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\log_e 2\right)$ என்று நிறுவுக.

11. $i^{x+iy} = A + iB$ எனில்,

    $A^2 + B^2 = e^{-(4n+1)\pi y}$ என நிறுவுக.

12. $(1+i\tan\alpha)^{1+i\tan\beta}$-க்கு மெய் மதிப்புகள் தாம் உண்டு எனில், $(\sec\alpha)^{\sec^2\beta}$ ஆனது அவைகளுள் ஒன்று என நிறுவுக.

13. $(a+ib)^p = m^{x+iy}$ எனில், $\dfrac{2\tan^{-1}\dfrac{b}{a}}{\log_e(a^2+b^2)}$ ஆனது $\dfrac{y}{x}$-ன் ஒரு மதிப்பு என நிறுவுக.

14. $a^{\alpha+i\beta} = (x+iy)^{p+iq}$, முதன் மதிப்புகளை மட்டும் கருத்தில் கொள்கிறேம் எனில்,

(i) $\alpha = \dfrac{1}{2} p \log_a(x^2+y^2) - q\tan^{-1}\dfrac{y}{x} \,.\, \log_a e$

(ii) $\log_a(x^2+y^2) = \dfrac{2(\alpha p+\beta q)}{p^2+q^2}$ என நிறுவுக.

15. $(a+ib)^{\alpha+i\beta}$-ன் முதன் மதிப்பு முழுவதுமே மெய் அல்லது முழுவதுமே கற்பனை என்பது

$$\frac{1}{2}\beta\log_e(a^2+b^2)+\alpha\tan^{-1}\frac{b}{a}$$

என்ற எண் $\dfrac{\pi}{2}$-ன் இரட்டை அல்லது ஒற்றை மடங்கு என்பதைப் பொறுத்தது என நிறுவுக.

16. $\text{Log}_2(-3)$-ன் பொது மதிப்பையும், முதன் மதிப்பையும் காண்க.

## விடை

16. பொது மதிப்பு :

$$\frac{\{\log_e 3.\log_e 2+2n(2m+1)\pi^2\}+i\pi\{(2m+1)\log_e 2-2n\log_e 3\}}{(\log_e 2)^2+4n^2\pi^2}$$

முதன் மதிப்பு : $\dfrac{\log_e 3+\pi i}{\log_e 2}$

## 7.14. கிரிகரியின் தொடர் (Gregory's Series)

$-\dfrac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4}$ எனில்,

$$\theta = \tan\theta - \frac{1}{3}\tan^3\theta + \frac{1}{5}\tan^5\theta - \dots\dots\dots \infty$$

**நிறுவல் :**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$= \cos\theta\,[1+i\tan\theta]$$

$$\therefore \sec\theta.\ e^{i\theta} = 1 + i\tan\theta$$

$$\therefore \log(\sec\theta.\ e^{i\theta}) = \log(1 + i\tan\theta)$$

அ - து, $[\log_e \sec\theta] + i\theta = \log(1 + i\tan\theta)$

[சூத்திரம் (205)-ன் படி]

$\log(1 + i\tan\theta)$ ஐ $i\tan\theta$-ன் அடுக்குகளின் மூலம் விரித்து எழுதுவதற்கு, $|i\tan\theta| < 1$ ஆக இருக்க வேண்டும் அல்லது $|i\tan\theta| = 1$, $i\tan\theta \neq -1$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

$-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ ஆக இருக்கும்பொழுது, $-1 < \tan\theta < 1$

அ - து, $|\tan\theta| < 1$

$\therefore |i\tan\theta| = |\tan\theta| < 1$

$\theta = \pm\frac{\pi}{4}$ ஆக இருக்கும்போது, $|i\tan\theta| = 1$,

மேலும், $i\tan\theta = \pm i$ $\therefore$ $i\tan\theta \neq -1$.

ஆகவே, $\log(1 + i\tan\theta)$-ன் விரித்தல் செல்லுபடியாகும்.

$\therefore (\log_e \sec\theta) + i\theta$

$$= i\tan\theta - \frac{i^2\tan^2\theta}{2} + \frac{i^3\tan^3\theta}{3} - \frac{i^4\tan^4\theta}{4} + \dots\dots\dots \infty$$

$$= i\tan\theta + \frac{\tan^2\theta}{2} - i\frac{\tan^3\theta}{3} + \frac{\tan^4\theta}{4} - \dots\dots\dots \infty$$

கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த,

$$\theta = \tan\theta - \frac{\tan^3\theta}{3} + \frac{\tan^5\theta}{5} - \frac{\tan^7\theta}{7} + \dots\dots\dots \infty \quad (229)$$

இந்தத் தொடருக்குக் கிரிகரியின் தொடர் (Gregory's Series) என்பது பெயர்.

**குறிப்பு :**

1. $-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$ ஆக இருப்பதால், $-1 \leqslant \tan\theta \leqslant 1$.

$\tan\theta = x$, அதாவது, $\theta = \tan^{-1}x$ என்று கிரிகரியின் தொடரில் இட்டால்,

$$\tan^{-1}x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots\dots\dots \infty,$$

$$[-1 \leqslant x \leqslant 1] \quad (230)$$

இந்தத் தொடரும் கிரிகரியின் தொடர் என அழைக்கப்படுகிறது.

2. $n$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியம், $n\pi - \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant n\pi + \frac{\pi}{4}$ எனில், $-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta - n\pi \leqslant \frac{\pi}{4}$

$$\therefore \ \theta - n\pi = \tan(\theta - n\pi) - \frac{1}{3}\tan^3(\theta - n\pi) + \frac{1}{5}\tan^5(\theta - n\pi) - \ldots\ldots\ldots \infty$$

$$\text{அ-து, } \theta - n\pi = \tan\theta - \frac{1}{3}\tan^3\theta + \frac{1}{5}\tan^5\theta - \ldots \infty \quad (231)$$

இவ்வுண்மையானது கிரிகரியின் தொடரைவிடப் பொதுத் தன்மை வாய்ந்ததாகும். இதில் $n = 0$ என்று இட்டால், கிரிகரியின் தொடர் கிடைக்கும்.

### 7.15. $\pi$-ன் மதிப்பு

கிரிகரியின் தொடரில் $x = 1$ என்று இட்டால்,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ \ldots\ldots\ldots \infty \quad (232)$$

இந்தத் தொடரைப் பயன்படுத்தி $\pi$-ன் மதிப்பைக் காணலாம். இதன் குறைபாடு என்னவென்றால், இதில் அடுத்தடுத்து வரும் உறுப்புகளின் மதிப்புகள் விரைவாகக் குறைவதில்லை. எனவே, $\pi$-க்கு நெருக்கமான மதிப்பைக் காண்பதற்குப் பல உறுப்புகளைக் கூட்ட வேண்டியுள்ளது.

## மாதிரிக் கணக்குகள்

**மாதிரிக் கணக்கு 7-16.1.**

$-\frac{9\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant -\frac{7\pi}{4}$, $\theta - n\pi = \tan\theta - \frac{\tan^3\theta}{3} + \frac{\tan^5\theta}{5} - \ldots\ldots\ldots \infty$ **எனில், $n$-ன் மதிப்பைக் காண்க.**

$$\theta - n\pi = \tan\theta - \frac{\tan^3\theta}{3} + \frac{\tan^5\theta}{5} - \ldots\ldots \infty \ (\text{கொள்கை})$$

$$\therefore \ -\frac{\pi}{4} \leqslant \theta - n\pi \leqslant \frac{\pi}{4}$$

$$\text{அ-து, } n\pi - \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant n\pi + \frac{\pi}{4}$$

ஆனல், $-\frac{9\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant -\frac{7\pi}{4}$ (கொள்கை)

$\therefore\ n\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{7\pi}{4}$

அ-து, $n\pi = -2\pi$

$\therefore\ n = -2$

**மாதிரிக் கணக்கு 7-16.2.**

$-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$ **எனில்,**

$$\tan\theta - \frac{1}{3}\tan^3\theta + \frac{1}{5}\tan^5\theta - \dots\dots\dots \infty$$

$$= \tanh\theta + \frac{1}{3}\tanh^3\theta + \frac{1}{5}\tanh^5\theta + \dots\dots\dots \infty,$$

**என நிறுவுக.**

$-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$ (கொள்கை)

$$\therefore \tan\theta - \frac{1}{3}\tan^3\theta + \frac{1}{5}\tan^5\theta - \dots\dots \infty = \theta \dots\dots \quad \text{(i)}$$

$\tanh\theta = y$ என இருக்கட்டும்.

$\theta$ ஆனது எந்த ஒரு மெய் எண்ணுக இருந்தாலும், $|\tanh\theta| < 1$.

அதாவது, $|y| < 1$.

இப்பொழுது,

$$\tanh\theta + \frac{1}{3}\tanh^3\theta + \frac{1}{5}\tanh^5\theta + \dots\dots\dots \infty$$

$$= y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \dots\dots\dots \infty$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y} \quad [\because |y| < 1]$$

$= \tanh^{-1} y$ [சூத்திரம் (203)-ன் படி]

$= \tanh^{-1}(\tanh\theta)$

$= \theta$ .................. (ii)

(i), (ii)-லிருந்து,

$$\tan\theta - \frac{1}{3}\tan^3\theta + \frac{1}{5}\tan^5\theta - \dots\dots\dots\dots \infty$$

$$= \tanh\theta + \frac{1}{3}\tanh^3\theta + \frac{1}{5}\tanh^5\theta + \dots\dots\dots \infty$$

**மாதிரிக் கணக்கு 7-16.3.**

$|x| < \sqrt{2} - 1$ எனில்,

$$2\left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots \infty\right]$$

$$= \frac{2x}{1-x^2} - \frac{1}{3}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^5 - \ldots\ldots \infty$$

என நிறுவுக. (செ. ப. 1949 மா.)

$|x| < \sqrt{2} - 1$ (கொள்கை)

$\therefore\ |x| < 1.$ அதாவது $x^2 < 1.$

$$\therefore\ 2\left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots \infty\right]$$

$$= 2\tan^{-1} x \qquad \ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

$|x| < \sqrt{2} - 1$ (கொள்கை)

$\therefore\ 1 + |x| < \sqrt{2}$

$\therefore\ 1 + |x|^2 + 2|x| < 2$

அ-து, $1 + x^2 + 2|x| < 2$

அ-து, $2|x| < 1 - x^2$

ஆனல் $1 - x^2 = |1 - x^2|$ $(\because\ x^2 < 1)$

$\therefore\ 2|x| < |1 - x^2|$

$$\therefore\ \frac{2|x|}{|1-x^2|} < 1$$

அ-து, $\left|\frac{2x}{1-x^2}\right| < 1$

$$\therefore\ \frac{2x}{1-x^2} - \frac{1}{3}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^5 - \ldots\ldots$$

$= \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ (கிரிகரியின் தொடரின் படி)

$= 2\tan^{-1} x$ [சூத்திரம் (33)-ன் படி]

$= 2\left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots \infty\right]$ [(i)-லிருந்து]

**மாதிரிக் கணக்கு 7-16.4.**

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{7}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3^3}+\frac{1}{7^3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{2}{3^5}+\frac{1}{7^5}\right)-\dots\dots\dots$$

$\dots=\frac{\pi}{4}$ என நிறுவுக.

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{7}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3^3}+\frac{1}{7^3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{2}{3^5}+\frac{1}{7^5}\right)-\dots\dots\dots$$

$$=\left[\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3^5}-\dots\dots\dots\infty\right]$$

$$+\left[\frac{1}{7}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7^5}-\dots\dots\dots\infty\right]$$

$$=2\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}-\dots\dots\dots\infty\right]$$

$$+\left[\frac{1}{7}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7^5}-\dots\dots\dots\infty\right]$$

$$=2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$$ [சூத்திரம் (230)-ன் படி]

$$=\tan^{-1}\frac{2.\ \frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3^2}}+\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$$ [சூத்திரம் (33)-ன் படி]

$$=\tan^{-1}\frac{3}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}}$$ [சூத்திரம் (31)-ன் படி]

$$=\tan^{-1}1$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

**மாதிரிக் கணக்கு 7-16.5.**

$0 < a < 1,\ 0 < b < 1,\ a + b + ab > 1,$

$c = \dfrac{a + b + ab - 1}{a + b + 1 - ab}$ எனில்,

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{(a^{2n-1} + b^{2n-1} - c^{2n-1})}{2n - 1} = \dfrac{\pi}{4}$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1960)

$0 < a < 1,\ 0 < b < 1$ (கொள்கை)

$\therefore\ 0 < ab < 1$

$\therefore\ ab - 1 < 0$ அ-து, $1 - ab > 0$ ......... (i)

$\therefore\ a + b + 1 - ab > 0$ ......... (ii)

$a + b + ab > 1$ (கொள்கை)

$\therefore\ a + b + ab - 1 > 0$ ......... (iii)

$c = \dfrac{a + b + ab - 1}{a + b + 1 - ab}$ (கொள்கை)

(ii), (iii) -லிருந்து, $c > 0$

(i) -லிருந்து, $c < 1$

$\therefore\ 0 < c < 1$ ......... (iv)

சூத்திரம் (230) -ன் படி,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a^{2n-1}}{(2n-1)} = \frac{a}{1} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} - \ldots\ldots\ldots \infty$$

$$= \tan^{-1} a \qquad [\because\ 0 < a < 1]$$

இதேபோல்,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{b^{2n-1}}{(2n-1)} = \tan^{-1} b \qquad [\because\ 0 < b < 1]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{c^{2n-1}}{(2n-1)} = \tan^{-1} c \qquad [\because\ 0 < c < 1]$$

இப்பொழுது,

இடக்கைப் பக்கம் $= \tan^{-1} a + \tan^{-1} b - \tan^{-1} c$

$= \tan^{-1} \dfrac{a + b}{1 - ab} - \tan^{-1} c$

[ சூத்திரம் (31)-ன் படி ]

ஆனல் $\frac{c}{1} = \frac{a+b+ab-1}{a+b+1-ab}$ (கொள்கை)

$$\therefore \frac{1+c}{1-c} = \frac{a+b+1-ab+a+b+ab-1}{a+b+1-ab-a-b-ab+1}$$

$$= \frac{2(a+b)}{2(1-ab)}$$

$$= \frac{a+b}{1-ab}$$

மேலும், $0 < c < 1$ ஆக இருப்பதால், $\frac{1+c}{1-c} > 1$

இப்பொழுது, இடக்கைப் பக்கம் $= \tan^{-1}\frac{1+c}{1-c} - \tan^{-1} c$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{1+c}{1-c} - \frac{c}{1}}{1+\left(\frac{1+c}{1-c}\right)c}$$

$$= \tan^{-1}\frac{1+c-c+c^2}{1-c+c+c^2}$$

$$= \tan^{-1} 1$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

## பயிற்சி 7 (இ)

1. $\theta - n\pi = \tan\theta - \frac{1}{3}\tan^3\theta + \frac{1}{5}\tan^5\theta - \dots\dots\dots\dots \infty$

என்பது உண்மை எனக் கொள்க. $\theta$-ன் மதிப்பு கீழ்க் கண்ட மதிப்புகளுக்கு இடையே இருந்தால், $n$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(a) $\frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$ (b) $\frac{23\pi}{4}, \frac{25\pi}{4}$

(c) $\frac{-5\pi}{4}, \frac{-3\pi}{4}$ (d) $\frac{-13\pi}{4}, \frac{-11\pi}{4}$

2. $-1 < x < 1$ எனில்,

$$x + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{9}x^9 + \dots\dots\dots \infty$$

$$= \frac{1}{2}\left[\tan^{-1} x + \frac{1}{2}\log_e\frac{1+x}{1-x}\right]$$ என நிறுவுக.

3. $x > 0$ எனில், $\tan^{-1} x =$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 - \ldots\ldots \infty$$

என நிறுவுக.

4. $0 \leqslant x \leqslant 1$ எனில்,

$$\tan^{-1} \frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi}{4} + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$$

என நிறுவுக.

இதன் மூலம் $\tan^{-1} 3 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \infty$ என்று நிரூபிக்க.

5. 0-க்கும் $\frac{\pi}{2}$-க்கும் இடையே $\theta$ இருந்தால்,

$$\tan^{-1} \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \tan^2 \frac{\theta}{2} - \frac{1}{3}\tan^6 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{5}\tan^{10} \frac{\theta}{2} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \infty$$

என்று நிரூபிக்க.

6. $\frac{\pi}{4}$-க்கும் $\frac{3\pi}{4}$-க்கும், இடையே $\phi$ இருந்தால்,

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \cot\phi + \frac{1}{3}\cot^3\phi - \frac{1}{5}\cot^5\phi + \ldots\ldots\ldots \infty$$

என நிறுவுக.

பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

7. $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$

8. $2 \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^4} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \infty$

9. $\pi = 2\sqrt{3}\left[1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty\right]$

10. $$\frac{\pi}{12} = 1 - \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}\right) + \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{3^{\frac{5}{2}}}\right) - \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$$

11. $-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$ எனில்,

$$\log_e \sec\theta = \frac{1}{2}\tan^2\theta - \frac{1}{4}\tan^4\theta + \frac{1}{6}\tan^6\theta - \ldots$$

$\ldots\ldots\infty$ என நிறுவுக.

12. $0 \leqslant x < 1,\ 0 \leqslant y < 1$ எனில்,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[x^{2n-1} + y^{2n-1}]}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)} \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^{2n-1}$$

என நிறுவுக.

(செ. ப. 1959)

## விடைகள்

1. (a) $n = 2$
   (b) $n = 6$
   (c) $n = -1$
   (d) $n = -3$

# 8. திரிகோண கணிதத் தொடர் கூட்டல்

## (Summation of Trigonometrical Series)

### 8.1. முன்னுரை

நாம் இதுவரை கற்றுள்ள முடிவுகளைப் பயன்படுத்திச் சில முக்கிய திரிகோண கணிதத் தொடர்களின் கூட்டுத் தொகைகளைக் காண்போம். இத் தொடர்களைக் கீழ்க்கண்ட வகைகளாகப் பிரிக்கலாம்.

1. கூட்டு விருத்தியில் (Arithmetic Progression) உள்ள கோணங்களினுடைய சைன்களின் அல்லது கொசைன்களின் தொடர்கள்.
2. பெருக்கல் தொடரைச் (Geometric Series) சார்ந்த தொடர்கள்.
3. கூட்டல் - பெருக்கல் தொடரைச் (Arithmetico - Geometric Series) சார்ந்த தொடர்கள்.
4. ஈருறுப்புத் தொடரைச் (Binomial Series) சார்ந்த தொடர்கள்.
5. அடுக்குக்குறித் தொடரைச் (Exponential Series) சார்ந்த தொடர்கள்.
6. சைன், கொசைன், அதிபரவளை சைன், அதிபரவளைக் கொசைன் தொடர்களைச் சார்ந்த தொடர்கள்.
7. மடக்கைத் தொடரைச் (Logarithmic Series) சார்ந்த தொடர்கள்.
8. கிரிகரியின் தொடரைச் சார்ந்த தொடர்கள்.
9. வேறுபாட்டு முறைக்கு (Difference Method) ஒத்து வரும் தொடர்கள்.

**8.2. கூட்டு விருத்தியில் உள்ள கோணங்களினுடைய சைன்களின் அல்லது கொசைன்களின் தொடர்கள்**

**8-2.1.** $\cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \ldots\ldots\ldots n$ **உறுப்புகள்,** $\sin \alpha + \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta) + \ldots\ldots n$ **உறுப்புகள் என்ற இரு தொடர்களின் கூட்டுத் தொகைகளைக் காண்க.**

$\alpha$, $\alpha + \beta$, $\alpha + 2\beta$, ...... என்ற கோணங்கள் கூட்டு விருத்தியில் (Arithmetic Progression) உள்ளன.

இதன் முதல் உறுப்பு $= \alpha$

பொது வேறுபாடு (Common Difference) $= \beta$

$\therefore n$ ஆம் உறுப்பு $= \alpha + (n-1)\beta$

$$C = \cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \ldots\ldots + \cos[\alpha + (n-1)\beta] \ldots\ldots \text{(i)}$$

$$S = \sin \alpha + \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta) + \ldots\ldots \sin[\alpha + (n-1)\beta] \ldots\ldots \text{(ii)}$$

என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது,

$$C + iS = [\cos \alpha + i \sin \alpha] + [\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)] + \ldots\ldots + [\cos\{\alpha + (n-1)\beta\} + i \sin\{\alpha + (n-1)\beta\}]$$

$$= e^{i\alpha} + e^{i(\alpha+\beta)} + \ldots\ldots\ldots + e^{i[\alpha + (n-1)\beta]},$$

[சூத்திரம் (141)-ன் படி]

$$= e^{i\alpha}\left[1 + e^{i\beta} + e^{i2\beta} + \ldots\ldots + e^{i(n-1)\beta}\right]$$

அடைப்புகளுக்கு இடையேயுள்ள தொடர் ஒரு பெருக்கல் தொடர். அதன் பொது விகிதம் (Common Ratio) $= e^{i\beta}$

$\therefore \quad C + iS$

$$= e^{i\alpha}\left[\frac{(e^{i\beta})^n - 1}{e^{i\beta} - 1}\right]$$

$$= e^{i\alpha}\left[\frac{e^{in\beta} - 1}{e^{i\beta} - 1}\right]$$

$$= e^{i\alpha} \frac{e^{\frac{in\beta}{2}} \left[ e^{\frac{in\beta}{2}} - e^{\frac{-in\beta}{2}} \right]}{e^{\frac{i\beta}{2}} \left[ e^{\frac{i\beta}{2}} - e^{\frac{-i\beta}{2}} \right]}$$

$$= e^{i\left[\alpha + (n-1)\frac{\beta}{2}\right]} \cdot \frac{2i \sin \frac{n\beta}{2}}{2i \sin \frac{\beta}{2}}$$

[சூத்திரம் (144)-ன் படி]

$$= \left[ \cos \left\{ \alpha + (n-1)\frac{\beta}{2} \right\} + i \sin \left\{ \alpha + (n-1)\frac{\beta}{2} \right\} \right] \cdot \frac{\sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}$$

மெய், கற்பனைப் பகுதிகளை முறையே சமப்படுத்த,

$$C = \cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \ldots\ldots + \cos[\alpha + (n-1)\beta]$$

$$= \cos \left[ \alpha + (n-1)\frac{\beta}{2} \right] \frac{\sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \qquad (233)$$

$$S = \sin \alpha + \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta) + \ldots\ldots\ldots + \sin[\alpha + (n-1)\beta]$$

$$= \sin \left[ \alpha + (n-1)\frac{\beta}{2} \right] \frac{\sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \qquad (234)$$

**துணை முடிவு :**

$\beta = p.\frac{2\pi}{n}$, $p$ ஒரு முழு எண் எனில், அதாவது $\beta$ ஆனது $\frac{2\pi}{n}$-ன் எந்த மடங்காக இருந்தாலும், $\frac{n\beta}{2} = p\pi$

$$\therefore \quad \sin\frac{n\beta}{2} = \sin p\pi = 0$$

$$\therefore \quad S = \sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \ldots\ldots + \sin[\alpha + (n-1)\beta] = 0,$$

$$C = \cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \ldots\ldots + \cos[\alpha+(n-1)\beta] = 0.$$

எனவே, கூட்டு விருத்தியில் உள்ள $n$ கோணங்களின் பொது வேறுபாடு $\frac{2\pi}{n}$-ன் எந்த மடங்காக இருந்தாலும், அவைகளுடைய சைன்களின் (கொசைன்களின்) கூட்டுத் தொகை பூச்சியம் ஆகும்.

**8-2.2.** $\sin\alpha - \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) - \sin(\alpha+3\beta) + \ldots\ldots\ldots$ $n$ **உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.**

$$\sin\alpha - \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) - \sin(\alpha+3\beta) + \ldots\ n \text{ உறுப்புகள்}$$

$$= \sin\alpha + \sin(\pi+\alpha+\beta) + \sin(2\pi+\alpha+2\beta) + \sin(3\pi+\alpha+3\beta) + \ldots\ldots\ldots + \sin[(n-1)\pi + \alpha + (n-1)\beta]$$

$$= \sin\alpha + \sin[\alpha+(\pi+\beta)] + \sin[\alpha+2(\pi+\beta)] + \sin[\alpha+3(\pi+\beta)] + \ldots\ldots\ldots + \sin[\alpha+(n-1)(\pi+\beta)]$$

$$= \sin\left[\alpha + (n-1)\frac{(\pi+\beta)}{2}\right]\frac{\sin\frac{n(\pi+\beta)}{2}}{\sin\frac{(\pi+\beta)}{2}}$$

[சூத்திரம் (234)-ன் படி]

**குறிப்பு :**

$$\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) - \cos(\alpha+3\beta) + \ldots\ldots\ n \text{ உறுப்புகள்}$$

$$= \cos\left[\alpha + (n-1)\frac{(\pi+\beta)}{2}\right]\frac{\sin\frac{n(\pi+\beta)}{2}}{\sin\frac{(\pi+\beta)}{2}}$$

என்று நிறுவலாம்.

**8-2.3.** $\cosh \alpha + \cosh(\alpha+\beta) + \cosh(\alpha+2\beta) + \ldots\ldots\ldots\ldots$ **$n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.**

$$\cosh \alpha + \cosh(\alpha+\beta) + \cosh(\alpha+2\beta) + \ldots \ldots\ldots \; n \text{ உறுப்புகள்}$$

$$= \cosh \alpha + \cosh(\alpha+\beta) + \cosh(\alpha+2\beta) + \ldots \ldots + \cosh[\alpha + (n-1)\beta]$$

$$= \cos i\alpha + \cos i(\alpha+\beta) + \cos i(\alpha+2\beta) + \ldots \ldots + \cos i[\alpha + (n-1)\beta]$$

$$= \cos i\alpha + \cos(i\alpha + i\beta) + \cos(i\alpha + i2\beta) + \ldots\ldots + \cos[i\alpha + i(n-1)\beta]$$

$$= \cos\left[i\alpha + (n-1)\frac{i\beta}{2}\right]\frac{\sin\frac{ni\beta}{2}}{\sin\frac{i\beta}{2}}$$

[சூத்திரம் (233)-ன் படி]

$$= \cos i\left[\alpha + (n-1)\frac{\beta}{2}\right]\frac{i\sinh\frac{n\beta}{2}}{i\sinh\frac{\beta}{2}}$$

[சூத்திரம் (167)-ன் படி]

$$= \cosh\left[\alpha + (n-1)\frac{\beta}{2}\right]\frac{\sinh\frac{n\beta}{2}}{\sinh\frac{\beta}{2}}$$

[சூத்திரம் (166)-ன் படி]

**8-2.4.**

$$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$$
$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$$
$$4\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - \sin 3\alpha$$
$$4\cos^3\alpha = 3\cos\alpha + \cos 3\alpha$$
$$8\sin^4\alpha = 3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha$$
$$8\cos^4\alpha = 3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha$$

என்ற சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி, கூட்டு விருத்தியில் உள்ள கோணங்களினுடைய சைன்களின் (கொசைன்களின்) 2 ஆம், 3 ஆம், 4 ஆம் அடுக்குகளின் கூட்டுத் தொகைகளைக் காணலாம்.

**8-2.5.** $\sin^3 \alpha + \sin^3 (\alpha + \beta) + \sin^3 (\alpha + 2\beta) + \ldots\ldots$ **என்ற தொடரின் $n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.**

$$4 \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - \sin 3 \alpha$$

$$4 \sin^3 (\alpha + \beta) = 3 \sin (\alpha + \beta) - \sin 3 (\alpha + \beta)$$

$$4 \sin^3 (\alpha + 2\beta) = 3 \sin (\alpha + 2\beta) - \sin 3 (\alpha + 2\beta)$$

..................................................................

..................................................................

கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடரின் $n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை S எனில்,

$$4S = 3 [\sin \alpha + \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha + 2\beta) + \ldots n \text{ உறுப்புகள்}]$$

$$- [\sin 3 \alpha + \sin 3 (\alpha + \beta) + \sin 3 (\alpha + 2\beta) + \ldots\ldots n \text{ உறுப்புகள்}]$$

$$= 3 \sin \left[ \alpha + (n - 1) \frac{\beta}{2} \right] \frac{\sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}$$

$$- \sin \left[ 3 \alpha + (n - 1) \frac{3\beta}{2} \right] \frac{\sin \frac{3n\beta}{2}}{\sin \frac{3\beta}{2}}$$

$$\therefore \quad S = \frac{1}{4} \left[ 3 \sin \left\{ \alpha + (n - 1) \frac{\beta}{2} \right\} \frac{\sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \right.$$

$$\left. - \sin \left\{ 3 \alpha + (n - 1) \frac{3\beta}{2} \right\} \frac{\sin \frac{3n\beta}{2}}{\sin \frac{3\beta}{2}} \right]$$

**8-2.6.** $\cos \alpha \sin \beta + \cos 3 \alpha \sin 2\beta + \cos 5 \alpha \sin 3\beta + \ldots\ldots$ ... **என்ற தொடரின் $n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.**

கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடரின் $n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை S எனில்,

$$2S = 2 \cos \alpha \sin \beta + 2 \cos 3 \alpha \sin 2\beta$$

$$+ 2 \cos 5 \alpha \sin 3\beta + \ldots\ldots\ldots\ldots n \text{ உறுப்புகள்}$$

$$= [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)] + [\sin(3\alpha + 2\beta) - \sin(3\alpha - 2\beta)]$$
$$+ \sin(5\alpha + 3\beta) - \sin(5\alpha - 3\beta)] + \ldots\ldots \quad n \text{ அடைப்புகள்}$$

$$= [\sin(\alpha + \beta) + \sin(3\alpha + 2\beta) + \sin(5\alpha + 3\beta) + \ldots\ldots\ n \text{ உறுப்புகள்}]$$
$$- [\sin(\alpha - \beta) + \sin(3\alpha - 2\beta) + \sin(5\alpha - 3\beta) + \ldots\ldots\ n \text{ உறுப்புகள்}]$$

$$= [\sin(\alpha + \beta) + \sin\{(\alpha + \beta) + (2\alpha + \beta)\} + \sin\{(\alpha + \beta) + 2(2\alpha + \beta)\} + \ldots\ldots\ n \text{ உறுப்புகள்}]$$
$$- [\sin(\alpha - \beta) + \sin\{(\alpha - \beta) + (2\alpha - \beta)\} + \sin\{(\alpha - \beta) + 2(2\alpha - \beta)\} + \ldots\ldots\ n \text{ உறுப்புகள்}]$$

$$= \sin\left[(\alpha + \beta) + (n - 1)\frac{(2\alpha + \beta)}{2}\right] \frac{\sin \frac{n(2\alpha + \beta)}{2}}{\sin \frac{(2\alpha + \beta)}{2}}$$
$$- \sin\left[(\alpha - \beta) + (n - 1)\frac{(2\alpha - \beta)}{2}\right] \frac{\sin \frac{n(2\alpha - \beta)}{2}}{\sin \frac{(2\alpha - \beta)}{2}}$$

[சூத்திரம் (234)-ன் படி]

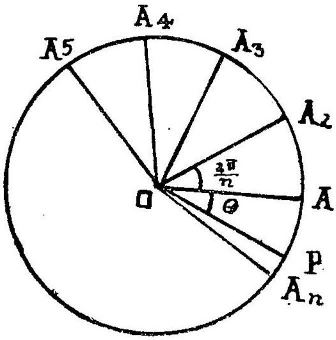
$$= \sin\left[n\alpha + \frac{(n + 1)\beta}{2}\right] \frac{\sin \frac{n(2\alpha + \beta)}{2}}{\sin \frac{(2\alpha + \beta)}{2}}$$
$$- \sin\left[n\alpha - \frac{(n + 1)\beta}{2}\right] \frac{\sin \frac{n(2\alpha - \beta)}{2}}{\sin \frac{(2\alpha - \beta)}{2}}$$

**8-2.7.** $A_1\ A_2\ A_3 \ldots\ldots\ldots\ A_n$ என்ற $n$ பக்கங்களுடைய ஓர் ஒழுங்குப் பலகோணம் O ஐ மையமாகவும், $r$ ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டத்தினுள்ளே வரையப்பட்டுள்ளது.

$\angle POA_1 = \theta$ ஆக இருக்கும்படி P என்ற புள்ளி வில் $A_n A_1$ மீது இருந்தால்,

$$PA_1 + PA_2 + \dots\dots\dots + PA_n = 2\,r\,\text{cosec}\,\frac{\pi}{2n}.$$

$\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2n}\right)$ என நிறுவுக.




படம் 33

$A_1\,A_2\,A_3\,\dots\dots A_n$ ஓர் ஒழுங்குப் பலகோணம் (படம் 33)

$$\therefore\quad \angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \dots\dots\dots\dots = \angle A_n\,OA_1 = \frac{2\,\pi}{n}$$

$\angle POA_1 = \theta$ (கொள்கை)

$$\therefore\quad \angle POA_2 = \theta + \frac{2\,\pi}{n}$$

$$\angle POA_3 = \theta + \frac{4\,\pi}{n}$$

.....................................

.....................................

$$\angle POA_n = \theta + (n-1)\,\frac{2\,\pi}{n}$$

இப்பொழுது, $PA_1 = 2r\,\sin\frac{\theta}{2}$

$$PA_2 = 2r\,\sin\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{n}\right]$$

$$PA_3 = 2r\,\sin\left[\frac{\theta}{2} + \frac{2\,\pi}{n}\right]$$

.....................................

.....................................

$$PA_n = 2r \sin\left[\frac{\theta}{2} + (n-1)\frac{\pi}{n}\right]$$

$$\therefore \quad PA_1 + PA_2 + PA_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + PA_n$$

$$= 2r\left[\sin\frac{\theta}{2} + \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2\pi}{n}\right) + \ldots\ldots + \sin\left\{\frac{\theta}{2} + (n-1)\frac{\pi}{n}\right\}\right]$$

$$= 2r\sin\left[\frac{\theta}{2} + (n-1)\frac{\pi}{2n}\right]\frac{\sin\frac{n\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

[ சூத்திரம் (234)-ன் படி ]

$$= 2r\sin\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2n}\right]\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

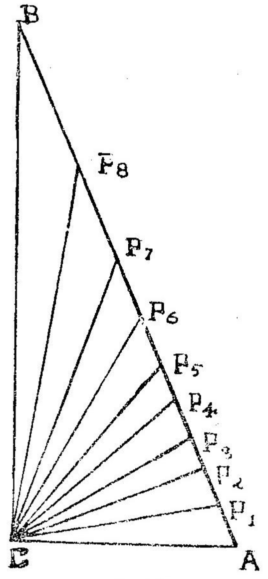
$$= 2r\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2n}\right)\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

$$= 2r\,\mathrm{cosec}\,\frac{\pi}{2n}\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2n}\right)$$

**8-2.8.** A B C என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில், செங்கோணம் C ஐ 9 சமபாகங்களாகப் பிரிக்கும் $CP_1$, $CP_2$, $CP_3$, ............., $CP_8$ என்ற கோடுகள் பக்கம் AB ஐ முறையே $P_1$, $P_2$, $P_3$, ..........., $P_8$ என்ற இடங்களில் சந்தித்தால்,

$$\frac{1}{CP_1} + \frac{1}{CP_2} + \frac{1}{CP_3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{CP_8} = \frac{(a+b)}{2ab}\left[\cot 5^\circ - 1\right]$$ என நிறுவுக.

( **செ. ப. 1952** )




படம் 34

படம் 34-ல், கொள்கைப்படி,

$$\angle P_1CA = \angle P_2CP_1 = \angle P_3CP_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots = \angle P_8CP_7$$

$$= \angle BCP_8 = \frac{\frac{\pi}{2}}{9} = \frac{\pi}{18}$$

$$\therefore \quad \angle CP_1A = \pi - \left(A + \frac{\pi}{18}\right)$$

$$\angle CP_2A = \pi - \left(A + \frac{2\pi}{18}\right)$$

$$\angle CP_3A = \pi - \left(A + \frac{3\pi}{18}\right)$$

..........................................

..........................................

$$\angle CP_8A = \pi - \left(A + \frac{8\pi}{18}\right)$$

$CP_1A$ என்ற முக்கோணத்தில்,

$$\frac{CP_1}{\sin A} = \frac{CA}{\sin CP_1A}$$

$$\therefore \quad CP_1 = CA \cdot \frac{\sin A}{\sin CP_1 A} = b \frac{\sin A}{\sin\left(A + \frac{\pi}{18}\right)}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{CP_1} = \frac{\sin\left(A + \frac{\pi}{18}\right)}{b \sin A}$$

இதேபோல், $$\frac{1}{CP_2} = \frac{\sin\left(A + \frac{2\pi}{18}\right)}{b \sin A}$$

$$\frac{1}{CP_3} = \frac{\sin\left(A + \frac{3\pi}{18}\right)}{b \sin A}$$

...................................

...................................

$$\frac{1}{CP_8} = \frac{\sin\left(A + \frac{8\pi}{18}\right)}{b \sin A}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{CP_1} + \frac{1}{CP_2} + \frac{1}{CP_3} + \dots\dots\dots + \frac{1}{CP_8}$$

$$= \frac{1}{b \sin A}\left[\sin\left(A + \frac{\pi}{18}\right) + \sin\left(A + \frac{2\pi}{18}\right) + \sin\left(A + \frac{3\pi}{18}\right) + \dots\dots\dots + \sin\left(A + \frac{8\pi}{18}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{b \sin A} \sin\left[A + \frac{\pi}{18} + \frac{7\pi}{36}\right] \frac{\sin \frac{8\pi}{36}}{\sin \frac{\pi}{36}}$$

[சூத்திரம் (234)-ன் படி]

$$= \frac{1}{b \sin A} \sin\left(A + \frac{9\pi}{36}\right) \frac{\sin \frac{2\pi}{9}}{\sin \frac{\pi}{36}}$$

$$= \frac{1}{b \sin A} \sin (A + 45^\circ) \frac{\sin 40^\circ}{\sin 5^\circ}$$

$$= \frac{\sin 40^\circ}{b \sin A \cdot \sin 5^\circ} [\sin A \cos 45^\circ + \cos A \sin 45^\circ]$$

$$= \frac{\sin 40^\circ}{b \sin 5^\circ} \frac{1}{\sin A} \left[ \sin A \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos A \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin 40^\circ}{b \sin 5^\circ} \frac{1}{\sin A} [\sin A + \cos A]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin (45^\circ - 5^\circ)}{b \sin 5^\circ} [1 + \cot A]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{b \sin 5^\circ} [\sin 45^\circ \cdot \cos 5^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 5^\circ] \cdot (1 + \cot A)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{b \sin 5^\circ} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5^\circ - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5^\circ \right] \cdot (1 + \cot A)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{b \sin 5^\circ} [\cos 5^\circ - \sin 5^\circ] \left( 1 + \frac{b}{a} \right)$$

$$= \frac{1}{2b} [\cot 5^\circ - 1] \left[ \frac{a + b}{a} \right]$$

$$= \frac{(a + b)}{2ab} (\cot 5^\circ - 1)$$

## பயிற்சி 8 (அ)

பின்வரும் தொடர்களின் கூட்டுத் தொகைகளைக் காண்க.

1. $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots\dots\dots$ $n$ உறுப்புகள்.
2. $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots\dots\dots$ $n$ உறுப்புகள்.
3. $\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \dots\dots\dots$ $n$ உறுப்புகள்.
4. $\cos \alpha + \cos 4\alpha + \cos 7\alpha + \dots\dots\dots$ $n$ உறுப்புகள்.
5. $\sin 2\alpha + \sin 5\alpha + \sin 8\alpha + \dots\dots\dots$ $n$ உறுப்புகள்.
6. $\sin \frac{\pi}{15} + \sin \frac{5\pi}{15} + \sin \frac{9\pi}{15} + \dots\dots\dots$ 9 உறுப்புகள்
7. $\cos \frac{\pi}{23} + \cos \frac{3\pi}{23} + \cos \frac{5\pi}{23} + \dots\dots\dots + \cos \frac{21\pi}{23}$
8. $\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \dots\dots\dots (n - 1)$ உறுப்புகள்.

9. $\cos\dfrac{\pi}{2n+1}+\cos\dfrac{3\pi}{2n+1}+\cos\dfrac{5\pi}{2n+1}$
$+ \ldots\ldots\ldots$ $n$ உறுப்புகள்.

10. $\cos\dfrac{\pi}{n}+\cos\dfrac{3\pi}{n}+\cos\dfrac{5\pi}{n}+\ldots\ldots\ldots (2n-1)$
உறுப்புகள்.

11. $\sin n\alpha+\sin(n-1)\alpha+\sin(n-2)\alpha+\ldots\ldots\ldots$
$2n$ உறுப்புகள்.

12. $\cos 2\alpha-\cos 4\alpha+\cos 6\alpha-\cos 8\alpha+\ldots\ldots\ldots$
$n$ உறுப்புகள்.

13. $\sin\alpha-\sin 2\alpha+\sin 3\alpha-\sin 4\alpha+\ldots\ldots\ldots$
$n$ உறுப்புகள்.

14. $\cos\alpha-\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-2\beta)-\cos(\alpha-3\beta)$
$+ \ldots\ldots\ldots$ $n$ உறுப்புகள்.

15. $\sinh x+\sinh(x+y)+\sinh(x+2y)+\ldots\ldots\ldots$
$n$ உறுப்புகள்.
(செ. ப. 1945 செ.)

16. $\cos^2 x+\cos^2(x+y)+\cos^2(x+2y)+\ldots\ldots\ldots$
$n$ உறுப்புகள்.
(செ. ப. 1946 செ.; 1953 செ.)

17. $\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+\cos^2 3\alpha+\ldots\ldots\ldots$ $n$ உறுப்புகள்.
(செ. ப. 1969 செ.)

18. $\sin^2\alpha+\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha+2\beta)+\ldots\ldots\ldots$
$n$ உறுப்புகள்.

19. $\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+\sin^2 3\alpha+\ldots\ldots\ldots$ $n$ உறுப்புகள்.

20. $\cos^2 x+\cos^2 3x+\cos^2 5x+\ldots\ldots\ldots$ $n$ உறுப்புகள்.

21. $\sin^2\alpha+\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{n}\right)+\sin^2\left(\alpha+\dfrac{2\pi}{n}\right)$
$+ \ldots\ldots\ldots$ $n$ உறுப்புகள்.

22. $\cos^2\alpha+\cos^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{n}\right)+\cos^2\left(\alpha-\dfrac{2\pi}{n}\right)$
$+ \ldots\ldots\ldots$ $n$ உறுப்புகள்.

23. $\sin^3\alpha+\sin^3 2\alpha+\sin^3 3\alpha+\ldots\ldots\ldots$ $n$ உறுப்புகள்.
(செ. ப. 1961 செ.)

24. $\cos^3 \alpha + \cos^3 2\alpha + \cos^3 3\alpha + \ldots\ldots\ldots$ $n$ உறுப்புகள்.

25. $\cos^3 \alpha + \cos^3 3\alpha + \cos^3 5\alpha + \ldots\ldots\ldots$ $n$ உறுப்புகள்.

26. $\sin^3 \alpha + \sin^3\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \sin^3\left(\alpha + \frac{4\pi}{n}\right)$
$+ \ldots\ldots\ldots$ $n$ உறுப்புகள்.

27. $\cos^4 \alpha + \cos^4 2\alpha + \cos^4 3\alpha + \ldots\ldots\ldots$ $n$ உறுப்புகள்.

28. $\sin^4 \alpha + \sin^4 2\alpha + \sin^4 3\alpha + \ldots\ldots\ldots$ $n$ உறுப்புகள்.

29. $\cos\theta \sin 2\theta + \cos 2\theta \sin 3\theta + \cos 3\theta \sin 4\theta$
$+ \ldots\ldots\ldots$ $n$ உறுப்புகள்.
(செ. ப. 1956 மா.)

30. $\sin\theta. \cos 3\theta + \sin 3\theta. \cos 5\theta + \sin 5\theta. \cos 7\theta$
$+ \ldots\ldots\ldots$ $n$ உறுப்புகள்.
(செ. ப. 1957 மா.)

31. $\cos\theta. \cos 2\theta + \cos 2\theta. \cos 3\theta + \cos 3\theta. \cos 4\theta$
$+ \ldots\ldots\ldots$ $n$ உறுப்புகள்.

32. $\sin\alpha. \sin 3\alpha + \sin 3\alpha \sin 5\alpha + \sin 5\alpha \sin 7\alpha$
$+ \ldots\ldots\ldots$ $n$ உறுப்புகள்.

33. ஆரம் $a$ உள்ள ஓர் அரை வட்டத்தின் பரிதியை $n$ சம விற்களாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகளுக்கும் விட்டத்தின் ஏதேனும் ஒரு முனைக்கும் (Extremity) இடையேயுள்ள தூரங்களின் கூட்டுத் தொகை $a\left(\cot\frac{\pi}{4n} - 1\right)$ என நிறுவுக.

34. $n$ பக்கங்களுள்ள ஓர் ஒழுங்குப் பலகோணம் $a$ ஐ ஆரமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தினுள்ளே வரையப்பட்டுள்ளது. அதன் ஓர் உச்சியை மற்ற உச்சிகளோடு சேர்ப்பதால் கிடைக்கும் நேர் கோடுகளின் நீளங்களின் கூட்டுத் தொகை $2a \cot\frac{\pi}{2n}$ என நிறுவுக.

35. $A_1 A_2 A_3 \ldots\ldots A_{2n} A_{2n+1}$ என்ற $(2n+1)$ பக்கங்களுள்ள ஓர் ஒழுங்குப் பலகோணம் ஒரு வட்டத்தினுள் வரையப்பட்டுள்ளது. O என்பது வட்டப் பரிதியில் $A_1$-க்கும், $A_{2n+1}$-க்கும் இடையேயுள்ள ஒரு புள்ளி எனில், $OA_1 + OA_3 + \ldots\ldots\ldots + OA_{2n+1} = OA_2 + OA_4 + \ldots\ldots\ldots + OA_{2n}$ என நிறுவுக.

36. $n$ பக்கங்களுள்ள ஓர் ஒழுங்குப் பலகோணம் $a$ ஐ ஆரமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தினுள்ளே வரையப்பட்டுள்ளது. அதன் பரிதியின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியைப் பலகோணத்தின் உச்சிகளோடு சேர்ப்பதால் கிடைக்கும் $n$ நாண்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $2na^2$ என நிறுவுக.

37. $A_1 A_2 A_3 \ldots\ldots A_n$ என்ற $n$ பக்கங்களுள்ள ஓர் ஒழுங்குப் பலகோணம் O ஐ மையமாகவும், $a$ ஐ ஆரமாகவும், கொண்ட வட்டத்தைச் சுற்றி வரையப்பட்டுள்ளது. P என்ற புள்ளி O-லிருந்து $c$ என்னும் தூரத்தில் இருக்கிறது. P-லிருந்து பலகோணத்தின் பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் குத்து நீளங்களின் (perpendiculars) வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $n\left(a^2 + \frac{c^2}{2}\right)$ என நிறுவுக. (செ. ப. 1947)

## விடைகள்

1. $\dfrac{\sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin \dfrac{(n+1)\alpha}{2}$

2. $\dfrac{\sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cos \dfrac{(n+1)\alpha}{2}$

3. $\sin^2 n\alpha . \operatorname{cosec} \alpha$

4. $\dfrac{\sin \frac{3n\alpha}{2}}{\sin \frac{3\alpha}{2}} \cos \dfrac{(3n-1)\alpha}{2}$

5. $\dfrac{\sin \frac{3n\alpha}{2}}{\sin \frac{3\alpha}{2}} \sin \dfrac{(3n+1)\alpha}{2}$

6. $\sin \dfrac{\pi}{5}$

7. $\dfrac{1}{2}$

8. $\cot \dfrac{\pi}{2n}$

9. $\dfrac{1}{2}$

10. $-\cos \dfrac{\pi}{n}$

11. $\sin n\alpha$

12. $\dfrac{\sin \dfrac{n(2\alpha+\pi)}{2}}{\sin \dfrac{(2\alpha+\pi)}{2}} \cos\left[(n+1)\alpha + (n-1)\dfrac{\pi}{2}\right]$

13. $\dfrac{\sin \dfrac{n(\pi+\alpha)}{2}}{\sin\left(\dfrac{\pi+\alpha}{2}\right)} \sin\left[\alpha + (n-1)\dfrac{(\pi+\alpha)}{2}\right]$

14. $\dfrac{\sin \dfrac{n}{2}(\pi-\beta)}{\cos \dfrac{\beta}{2}} \cos\left[\alpha + (n-1)\dfrac{(\pi-\beta)}{2}\right]$

15. $\dfrac{\sinh \dfrac{ny}{2}}{\sinh \dfrac{y}{2}} \sinh\left[x + (n-1)\dfrac{y}{2}\right]$

16. $\dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin ny}{\sin y}\cos\,[2x + (n-1)y]$

17. $\dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}\cos\,(n+1)\alpha$

18. $\dfrac{1}{2}\left[n - \dfrac{\sin n\beta}{\sin\beta}\cos(2\alpha + \overline{n-1}\;\beta)\right]$

19. $\dfrac{1}{2}\left[n - \dfrac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}\cos(n+1)\alpha\right]$

20. $\dfrac{1}{2}\left[n + \dfrac{\sin 4nx}{2\sin 2x}\right]$

21. $\dfrac{n}{2}$

22. $\dfrac{n}{2}$

23. $$\frac{1}{4}\left[\frac{3\sin(n+1)\frac{\alpha}{2}\ \sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin(n+1)\frac{3\alpha}{2}\,.\,\sin\frac{3n\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{2}}\right]$$

24. $$\frac{1}{4}\left[\frac{3\cos(n+1)\frac{\alpha}{2}\ \sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos(n+1)\frac{3\alpha}{2}\ \sin\frac{3n\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{2}}\right]$$

25. $$\frac{3\sin n\alpha\,.\,\cos n\alpha}{4\sin\alpha} + \frac{\sin 3n\alpha\,.\,\cos 3n\alpha}{4\sin 3\alpha}$$

26. 0

27. $$\frac{1}{8}\left[3n + 4\cos(n+1)\alpha\ \frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha} + \cos 2(n+1)\alpha\ \frac{\sin 2n\alpha}{\sin 2\alpha}\right]$$

28. $$\frac{1}{8}\left[3n - 4\cos(n+1)\alpha\ \frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha} + \cos 2(n+1)\alpha\ \frac{\sin 2n\alpha}{\sin 2\alpha}\right]$$

29. $$\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+2)\theta\ \sin n\theta}{\sin\theta} + n\sin\theta\right]$$

30. $$\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2(n+1)\theta\,.\ \sin 2n\theta}{\sin 2\theta} - n\sin 2\theta\right]$$

31. $$\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(n+2)\theta\,.\ \sin n\theta}{\sin\theta} + n\cos\theta\right]$$

32. $$\frac{1}{2}\left[n\cos 2\alpha - \frac{\cos 2(n+1)\alpha\ \sin 2n\alpha}{\sin 2\alpha}\right]$$

## 8.3. பெருக்கல் தொடரைச் சார்ந்த தொடர்கள்

**8-3.1.** $\sin\alpha + c\sin(\alpha+\beta) + c^2\sin(\alpha+2\beta) + \ldots\ldots$ **என்ற தொடரின் $n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.**

$\sigma = \sin\alpha + c\sin(\alpha+\beta) + c^2\sin(\alpha+2\beta) + \ldots\ldots\ldots n$ உறுப்புகள்,

$\gamma = \cos\alpha + c\cos(\alpha+\beta) + c^2\cos(\alpha+2\beta) + \ldots\ldots\ldots n$ உறுப்புகள் என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது,

$$\gamma + i\sigma = (\cos\alpha + i\sin\alpha) + c\,[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)] + c^2[\cos(\alpha+2\beta) + i\sin(\alpha+2\beta)] + \ldots\ldots\ldots n \text{ உறுப்புகள்.}$$

$$= e^{i\alpha} + c\,e^{i(\alpha+\beta)} + c^2 e^{i(\alpha+2\beta)} + \ldots\ldots\ldots n \text{ உறுப்புகள்}$$

$$= e^{i\alpha}\left[1 + c\,e^{i\beta} + c^2 e^{i2\beta} + \ldots\ldots\ldots n \text{ உறுப்புகள்}\right]$$

$$= e^{i\alpha}\left[1 + c\,e^{i\beta} + (c\,e^{i\beta})^2 + \ldots\ldots\ldots n \text{ உறுப்புகள்}\right]$$

$$= \frac{e^{i\alpha}\left[1-(c\,e^{i\beta})^n\right]}{1 - c\,e^{i\beta}}$$

$$= \frac{e^{i\alpha}\left(1 - c^n e^{in\beta}\right)}{\left(1 - ce^{i\beta}\right)}$$

$$= \frac{e^{i\alpha}\left[1 - c^n e^{in\beta}\right]\left[1 - c\,e^{-i\beta}\right]}{\left[1 - c\,e^{i\beta}\right]\left[1 - c\,e^{-i\beta}\right]}$$

$$= \frac{e^{i\alpha}\left[1 - c\,e^{-i\beta} - c^n e^{in\beta} + c^{n+1} e^{i(n-1)\beta}\right]}{\left[1 - c\left(e^{i\beta} + e^{-i\beta}\right) + c^2\right]}$$

$$= \frac{e^{i\alpha} - c\,e^{i(\alpha-\beta)} - c^n e^{i(\alpha+n\beta)} + c^{n+1} e^{i[\alpha+(n-1)\beta]}}{1 - 2c\cos\beta + c^2}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} (\cos \alpha + i \sin \alpha) - c\{\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)\} \\ - c^n \{\cos(\alpha + n\beta) + i \sin(\alpha + n\beta)\} \\ + c^{n+1}\{\cos(\alpha + \overline{n-1}\,\beta) + i \sin(\alpha + \overline{n-1}\,\beta)\} \end{bmatrix}}{1 - 2c\cos\beta + c^2}$$

கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த,

$$\sigma = \frac{\sin \alpha - c\sin(\alpha-\beta) - c^n \sin(\alpha + n\beta) + c^{n+1} \sin(\alpha + \overline{n-1}\,\beta)}{1 - 2c\cos\beta + c^2} \qquad (235)$$

**துணை முடிவுகள் :**

1. $\gamma = \cos\alpha + c\cos(\alpha+\beta) + c^2\cos(\alpha + 2\beta) + \ldots\ldots\ldots\ n$ உறுப்புகள்

$$= \frac{\cos\alpha - c\cos(\alpha-\beta) - c^n\cos(\alpha + n\beta) + c^{n+1}\cos(\alpha + \overline{n-1}\,\beta)}{1 - 2c\cos\beta + c^2} \qquad (236)$$

2. $|c| < 1, n \to \infty$ எனில், $c^n \to 0,\ c^{n+1} \to 0.$

$\therefore \sin\alpha + c\sin(\alpha+\beta) + c^2\sin(\alpha+2\beta) + \ldots\ldots \infty$

$$= \frac{\sin\alpha - c\sin(\alpha-\beta)}{1 - 2c\cos\beta + c^2} \qquad (237)$$

$\cos\alpha + c\cos(\alpha+\beta) + c^2\cos(\alpha+2\beta) + \ldots\ldots\ldots \infty$

$$= \frac{\cos\alpha - c\cos(\alpha-\beta)}{1 - 2c\cos\beta + c^2} \qquad (238)$$

3. சூத்திரம் (235)-ல் $c = 1$ என்று இட்டோமானால்,

$\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \ldots\ldots\ n$ உறுப்புகள்

$$= \frac{\sin\alpha - \sin(\alpha-\beta) - \sin(\alpha+n\beta) + \sin(\alpha + \overline{n-1}\,\beta)}{2 - 2\cos\beta}$$

$$= \frac{2\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2} - 2\cos\left[\alpha + (2n-1)\frac{\beta}{2}\right]\sin\frac{\beta}{2}}{2(1-\cos\beta)}$$

$$= \frac{\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2} - \cos\left[\alpha + (2n-1)\frac{\beta}{2}\right]\sin\frac{\beta}{2}}{2\sin^2\frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left[\alpha + (2n-1)\frac{\beta}{2}\right]}{2\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{2\sin\left[\alpha + (n-1)\frac{\beta}{2}\right]\sin\frac{n\beta}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$= \sin\left[\alpha + (n-1)\frac{\beta}{2}\right]\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} \qquad (234)$$

இதே போல,

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \dots\dots\dots$$

$n$ உறுப்புகள்

$$= \cos\left[\alpha + (n-1)\frac{\beta}{2}\right]\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} \qquad (233)$$

என்று நிறுவலாம்.

**8-3.2.** $1 + c\cosh x + c^2\cosh 2x + \dots\dots\dots\dots,$ **என்ற தொடரின் $n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.**

கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடரின் $n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை S எனில்,

$$2S = 2 + 2c\cosh x + 2c^2\cosh 2x + 2c^3\cosh 3x + \dots\dots\dots$$

...... $n$ உறுப்புகள்

$$= 2 + c\left(e^x + e^{-x}\right) + c^2\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)$$

$$+ c^3\left(e^{3x} + e^{-3x}\right) + \dots\dots\dots \; n \text{ உறுப்புகள்}$$

$$= \left[1 + ce^x + c^2 e^{2x} + c^3 e^{3x} + \dots\dots\dots \; n \text{ உறுப்புகள்}\right]$$

$$+\left[1+ce^{-x}+c^2e^{-2x}+c^3e^{-3x}+\ldots\ldots \ldots\ldots n \text{ உறுப்புகள்}\right]$$

$$=\left[1+ce^{x}+(ce^{x})^2+(ce^{x})^3+\ldots\ldots n \text{ உறுப்புகள்}\right]$$

$$+\left[1+ce^{-x}+(ce^{-x})^2+(ce^{-x})^3+\ldots\ldots \ldots\ldots n \text{ உறுப்புகள்}\right]$$

$$=\frac{1-c^n e^{nx}}{1-e^{x}}+\frac{1-c^n e^{-nx}}{1-ce^{-x}}$$

$$=\frac{(1-c^n e^{nx})(1-ce^{-x})+(1-c^n e^{-nx})(1-ce^{x})}{(1-ce^{x})(1-ce^{-x})}$$

$$=\frac{\left[\begin{array}{l}1-ce^{-x}-c^n e^{nx}+c^{n+1}e^{(n-1)x}\\ \quad +1-ce^{x}-c^n e^{-nx}+c^{n+1}e^{-(n-1)x}\end{array}\right]}{1-ce^{-x}-ce^{x}+c^2}$$

$$=\frac{\begin{array}{l}2-c(e^{x}+e^{-x})-c^n(e^{nx}+e^{-nx})\\ \quad +c^{n+1}\left[e^{(n-1)x}+e^{-(n-1)x}\right]\end{array}}{1-c(e^{x}+e^{-x})+c^2}$$

$$=\frac{2-2c\cosh x-2c^n\cosh nx+2c^{n+1}\cosh(n-1)x}{1-2c\cosh x+c^2}$$

$$\therefore S=\frac{1-c\cosh x-c^n\cosh nx+c^{n+1}\cosh(n-1)x}{1-2c\cosh x+c^2}$$

**துணை முடிவு :**

$|c|<1$, $n\to\infty$ எனில், $c^n\longrightarrow 0$, $c^{n+1}\longrightarrow 0$

$$\therefore\ 1+c\cosh x+c^2\cosh 2x+\ldots\ldots\ldots\infty$$

$$=\frac{1-c\cosh x}{1-2c\cosh x+c^2}$$

**8-3.3.** ABC என்ற முக்கோணத்தில் $b < c$ எனில்,

$$\sin A + \frac{b}{c}\sin 2A + \frac{b^2}{c^2}\sin 3A + \ldots\ldots\ldots\infty = \frac{c}{a}\sin C$$

என நிறுவுக.

கொள்கைப்படி, $b < c$

$$\therefore \frac{b}{c} < 1$$

$$\frac{b}{c} = x \text{ எனில்}, \quad x < 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

$$\sigma = \sin A + \frac{b}{c}\sin 2A + \frac{b^2}{c^2}\sin 3A + \ldots\ldots\ldots\infty,$$

$$\gamma = \cos A + \frac{b}{c}\cos 2A + \frac{b^2}{c^2}\cos 3A + \ldots\ldots\ldots\infty$$

என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது,

$$\gamma + i\sigma = (\cos A + i\sin A) + x(\cos 2A + i\sin 2A) + x^2(\cos 3A + i\sin 3A) + \ldots\ldots\ldots\infty$$

$$= e^{iA} + x\,e^{i2A} + x^2\,e^{i3A} + \ldots\ldots\ldots\infty$$

$$= e^{iA}\left[1 + x e^{iA} + x^2 e^{i2A} + x^3 e^{i3A} + \ldots\ldots\infty\right]$$

$$= e^{iA}\left[1 + x e^{iA} + \left(x e^{iA}\right)^2 + \left(x e^{iA}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots\infty\right]$$

அடைப்புகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர் ஒரு பெருக்கல் தொடர். அதன் பொது விகிதம் (Common Ratio) $= x e^{iA}$.

மேலும், $\left|x e^{iA}\right| = x < 1$ [(i)-லிருந்து]

எனவே, அந்தத் தொடர் ஓர் ஒருங்கும் தொடர் (Convergent Series).

ஆகவே, இப்பொழுது,

$$\gamma + i\sigma = e^{iA}\frac{1}{\left(1 - x e^{iA}\right)}$$

$$= \frac{e^{iA}\left(1 - x e^{-iA}\right)}{\left(1 - x e^{iA}\right)\left(1 - x e^{-iA}\right)}$$

$$= \frac{e^{iA} - x}{1 - x\left(e^{iA} + e^{-iA}\right) + x^2}$$

$$= \frac{\cos A + i \sin A - x}{1 - 2x \cos A + x^2}$$

$$= \frac{(\cos A - x) + i \sin A}{1 - 2x \cos A + x^2}$$

கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த,

$$\sigma = \frac{\sin A}{1 - 2x \cos A + x^2}$$

$$= \frac{\sin A}{1 - 2\frac{b}{c} \cos A + \frac{b^2}{c^2}}$$

$$= \frac{c^2 \sin A}{c^2 - 2bc \cos A + b^2}$$

$$= \frac{c^2 \sin A}{a^2}$$

$$= \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{a} \sin A$$

$$= \frac{c}{a} \cdot \frac{\sin C}{\sin A} \cdot \sin A$$

$$= \frac{c}{a} \sin C$$

**8-3.4.**

$-1 < r < 1$ எனில்,

$$1 + 2r \cos\theta + 2r^2 \cos 2\theta + 2r^3 \cos 3\theta + \ldots\ldots \infty$$

$$= \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1948 மா.)

(செ. ப. 1969 செ.)

$$C = 1 + 2r \cos\theta + 2r^2 \cos 2\theta + 2r^3 \cos 3\theta + \ldots\ldots \infty,$$

$$S = \quad 2r \sin\theta + 2r^2 \sin 2\theta + 2r^3 \sin 3\theta + \ldots\ldots \infty$$

என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது,

$$C + iS = 1 + 2r(\cos\theta + i\sin\theta) + 2r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + 2r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) + \dots\dots\dots \infty$$

$$= 1 + 2r\, e^{i\theta} + 2r^2\, e^{i2\theta} + 2r^3\, e^{i3\theta} + \dots\dots\dots \infty$$

$$= 1 + 2r\, e^{i\theta}\left[1 + r\, e^{i\theta} + r^2 e^{i2\theta} + \dots\dots\dots \infty\right]$$

$$= 1 + 2r\, e^{i\theta}\left[1 + r\, e^{i\theta} + \left(r e^{i\theta}\right)^2 + \dots\dots\dots \infty\right]$$

$$= 1 + 2r\, e^{i\theta}\left[\frac{1}{1 - r\, e^{i\theta}}\right] \qquad \left[\because \left| r e^{i\theta} \right| = |r| < 1\right]$$

$$= 1 + \frac{2r\, e^{i\theta}\left(1 - r\, e^{-i\theta}\right)}{\left(1 - r\, e^{i\theta}\right)\left(1 - r\, e^{-i\theta}\right)}$$

$$= 1 + \frac{2r\left(e^{i\theta} - r\right)}{1 - r\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) + r^2}$$

$$= 1 + \frac{2r\,[\cos\theta + i\sin\theta - r]}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

$$= \frac{1 - 2r\cos\theta + r^2 + 2r\cos\theta + 2ri\sin\theta - 2r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

$$= \frac{1 - r^2 + 2ri\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

மெய்ப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த,

$$C = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

**8.4. கூட்டல் — பெருக்கல் தொடரைச் சார்ந்த தொடர்கள்**

**8-4.1.** $|x| < 1$ எனில்,

$$\cos\alpha + 2x\cos(\alpha + \beta) + 3x^2\cos(\alpha + 2\beta) + \dots\dots\dots \infty$$

**என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.**

$$C = \cos\alpha + 2x\cos(\alpha + \beta) + 3x^2\cos(\alpha + 2\beta) + \dots\dots \infty$$

$$S = \sin\alpha + 2x\sin(\alpha + \beta) + 3x^2\sin(\alpha + 2\beta) + \dots\dots \infty$$

என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது,

$$C + iS = (\cos \alpha + i \sin \alpha) + 2x [\cos (\alpha + \beta) + i \sin (\alpha + \beta)] + 3x^2 [\cos (\alpha + 2\beta) + i \sin (\alpha + 2\beta)] + \ldots \ldots \infty$$

$$= e^{i\alpha} + 2x\, e^{i(\alpha + \beta)} + 3x^2\, e^{i(\alpha + 2\beta)} + \ldots \ldots \infty$$

$$= e^{i\alpha} \left[1 + 2x\, e^{i\beta} + 3x^2\, e^{i\,2\beta} + \ldots \ldots \infty\right]$$

$$= e^{i\alpha} \left[1 + 2\left(x\, e^{i\beta}\right) + 3\left(x\, e^{i\beta}\right)^2 + \ldots \ldots \infty\right]$$

$$= e^{i\alpha} \left[1 + 2r + 3r^2 + \ldots \ldots \infty\right],\; r = x\, e^{i\beta}.$$

அடைப்புகளுக்கிடையே உள்ள தொடர் ஒரு கூட்டல்—பெருக்கல் தொடர் (Arithmetico-Geometric Series). அதன் பொது விகிதம் $= r$.

மேலும் $|r| = \left| x\, e^{i\beta} \right| = |x| < 1$ (கொள்கை). எனவே, இந்தத் தொடர் குவியும் தன்மை உடையது. இதன் கூட்டுத் தொகை $\sigma$ எனில்,

$$\sigma = 1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \ldots \ldots \infty$$

$$\therefore\; r\sigma = r + 2r^2 + 3r^3 + \ldots \ldots \infty$$

$$\therefore\; \sigma - r\sigma = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots \ldots \infty$$

அ-து, $\sigma(1 - r) = \dfrac{1}{1 - r}$ $[\because\; |r| < 1]$

$$\therefore\; \sigma = \frac{1}{(1 - r)^2}$$

இப்பொழுது,

$$C + iS = e^{i\alpha} \frac{1}{(1 - r)^2}$$

$$= e^{i\alpha} \frac{1}{\left(1 - x\, e^{i\beta}\right)^2}$$

$$= \frac{e^{i\alpha} \left(1 - x\, e^{-i\beta}\right)^2}{\left(1 - x\, e^{i\beta}\right)^2 \left(1 - x\, e^{-i\beta}\right)^2}$$

$$= \frac{e^{i\alpha} \left[1 - 2x\, e^{-i\beta} + x^2\, e^{-2i\beta}\right]}{\left[\left(1 - x\, e^{i\beta}\right)\left(1 - x\, e^{-i\beta}\right)\right]^2}$$

$$= \frac{e^{i\alpha}\left[1 - 2x\, e^{-i\beta} + x^2 e^{-2i\beta}\right]}{\left[1 - x\left(e^{i\beta} + e^{-i\beta}\right) + x^2\right]^2}$$

$$= \frac{e^{i\alpha} - 2x\, e^{i(\alpha - \beta)} + x^2 e^{i(\alpha - 2\beta)}}{[1 - 2x\cos\beta + x^2]^2}$$

$$= \frac{\{\cos\alpha + i\sin\alpha\} - 2x\{\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)\} + x^2\{\cos(\alpha - 2\beta) + i\sin(\alpha - 2\beta)\}}{[1 - 2x\cos\beta + x^2]^2}$$

மெய்ப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த,

$$C = \frac{\cos\alpha - 2x\cos(\alpha - \beta) + x^2\cos(\alpha - 2\beta)}{[1 - 2x\cos\beta + x^2]^2} \qquad (239)$$

**துணை முடிவு :**

$$S = \frac{\sin\alpha - 2x\sin(\alpha - \beta) + x^2\sin(\alpha - 2\beta)}{[1 - 2x\cos\beta + x^2]^2} \qquad (240)$$

## பயிற்சி 8 (ஆ)

**பின்வரும் தொடர்களின் கூட்டுத் தொகைகளைக் காண்க.**

1. $c\sin\alpha + c^2\sin 2\alpha + c^3\sin 3\alpha + \ldots\ldots$ $n$ உறுப்புகள் வரையும், முடிவிலி வரையும்.

2. $\frac{\sin\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{2^2} + \frac{\sin 3\theta}{2^3} + \ldots\ldots\ldots \infty$

   (செ. ப. 1953 செ.)

3. $\frac{\sin\alpha}{3} + \frac{\sin 2\alpha}{3^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^3} + \ldots\ldots\ldots \infty$

   (செ. ப. 1965 ஏ.)

4. $\cos\theta\sin\theta + \cos^2\theta\sin 2\theta + \cos^3\theta\sin 3\theta + \ldots\ldots \infty$

5. $1 + x\cos\theta + x^2\cos 2\theta + \ldots\ldots + x^{n-1}\cos(n-1)\theta$

   (செ. ப. 1955)

6. $1 + c\cos\alpha + c^2\cos 2\alpha + c^3\cos 3\alpha + \ldots\ldots \infty,$

   $|c| < 1.$

   (செ. ப. 1970 செ.)

7. $1 + r\cos A\cos B + r^2\cos 2A\cos 2B + r^3\cos 3A\cos 3B + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty, \quad |r| < 1.$

8. $\sin\theta + x\sin 2\theta + x^2\sin 3\theta + \ldots\ldots \infty.$

9. $\cos\theta + x\cos 2\theta + x^2\cos 3\theta + \ldots\ldots\ldots \infty$.

10. $\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{2^2}\sin 3\alpha + \ldots\ldots\ldots \infty$

(செ. ப. 1945 மா.; 1963 ஏ.; 1970 ஏ.)

11. $\cos\alpha + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{2^2}\cos 3\alpha + \ldots\ldots\ldots \infty$.

12. $x\cos\theta - x^2\cos 2\theta + x^3\cos 3\theta - x^4\cos 4\theta + \ldots \infty$.

13. $\frac{\sin\theta}{\tan x} - \frac{\sin 2\theta}{\tan^2 x} + \frac{\sin 3\theta}{\tan^3 x} - \frac{\sin 4\theta}{\tan^4 x} + \ldots \infty$, $\tan x > 1$.

14. $1 + c\cosh x + c^2\cosh 2x + c^3\cosh 3x + \ldots\ldots \infty$.

15. $c\sinh\alpha + c^2\sinh 2\alpha + c^3\sinh 3\alpha + \ldots\ldots\ \ldots\ldots$
$n$ உறுப்புகள் வரையும், முடிவிலி வரையும்.

16. $1 + 2r\cos\theta + 2r^2\cos 2\theta + 2r^3\cos 3\theta + \ldots\ldots\ldots\ldots$
$n$ உறுப்புகள்.

(செ. ப. 1969 செ.)

17. $r\sin\theta + 2r^2\sin 2\theta + 3r^3\sin 3\theta + \ldots\ldots\ldots \infty$.

(செ. ப. 1939 மா.)

18. $3\sin\alpha + 5\sin 2\alpha + 7\sin 3\alpha + \ldots\ldots$ $n$ உறுப்புகள்.

(செ. ப. 1967 ஏ.)

## விடைகள்

1. $S_n = \frac{c\sin\alpha - c^{n+1}\sin(n+1)\alpha + c^{n+2}\sin n\alpha}{1 - 2c\cos\alpha + c^2}$

$S_\infty = \frac{c\sin\alpha}{1 - 2c\cos\alpha + c^2}$, $|c| < 1$

2. $\frac{2\sin\alpha}{5 - 4\cos\theta}$

3. $\frac{3\sin\alpha}{10 - 6\cos\alpha}$

4. $\cot\theta$

5. $\frac{1 - x\cos\theta - x^n\cos n\theta + x^{n+1}\cos(n-1)\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$

6. $\frac{1 - c\cos\alpha}{1 - 2c\cos\alpha + c^2}$

7. $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1 - r\cos(A+B)}{1 - 2r\cos(A+B) + r^2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1 - r\cos(A-B)}{1 - 2r\cos(A-B) + r^2}$

8. $\dfrac{\sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$

9. $\dfrac{\cos\theta - x}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$

10. $\dfrac{4\sin\alpha}{5 - 4\cos\alpha}$

11. $\dfrac{2(2\cos\alpha - 1)}{5 - 4\cos\alpha}$

12. $\dfrac{x(x + \cos\theta)}{1 + 2x\cos\theta + x^2}$, $|x| < 1.$

13. $\dfrac{\sin\theta \,.\, \sin 2x}{2(1 + \sin 2x \,.\, \cos\theta)}$

14. $\dfrac{1 - c\cosh x}{1 - 2c\cosh x + c^2}$, $|c| < 1.$

15. $S_n = \dfrac{c\sinh\alpha - c^{n+1}\sinh(n+1)\alpha + c^{n+2}\sinh n\alpha}{1 - 2c\cosh\alpha + c^2}$

$S_\infty = \dfrac{c\sinh\alpha}{1 - 2c\cosh\alpha + c^2}$

16. $\dfrac{1 - r^2 - 2r^n\cos n\theta + 2r^{n+1}\cos(n-1)\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$

17. $\dfrac{r(1 - r^2)\sin\theta}{(1 - 2r\cos\theta + r^2)^2}$

18. $\dfrac{\sin\alpha - (2n+1)\sin(n+1)\alpha + (2n+3)\sin n\alpha}{2(1 - \cos\alpha)}$

**8.5. ஈருறுப்புத் தொடரைச் சார்ந்த தொடர்கள்.**

**8·5.1.** $\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin(\alpha + \beta) + \frac{1.3}{2.4}\sin(\alpha + 2\beta) + \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin(\alpha + 3\beta) + \ldots\ldots\ldots\infty$, என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

$S = \sin\alpha + \frac{1}{2}\sin(\alpha + \beta) + \frac{1.3}{2.4}\sin(\alpha + 2\beta) + \ldots\ldots\ldots\ldots\infty,$

$$C = \cos\alpha + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1.3}{2.4}\cos(\alpha+2\beta) + \dots\dots\dots\dots\infty$$

என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $C + iS = [\cos\alpha + i\sin\alpha]$

$$+ \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)]$$

$$+ \frac{1.3}{2.4}[\cos(\alpha+2\beta) + i\sin(\alpha+2\beta)] + \dots\dots\infty$$

$$= e^{i\alpha} + \frac{1}{2}e^{i(\alpha+\beta)} + \frac{1.3}{2.4}e^{i(\alpha+2\beta)} + \dots\dots\dots\infty$$

$$= e^{i\alpha}\left[1 + \frac{1}{2}e^{i\beta} + \frac{1.3}{2.4}e^{i2\beta} + \dots\dots\dots\infty\right]$$

$$= e^{i\alpha}\left[1 + \frac{1}{2}e^{i\beta} + \frac{1.3}{2.4}\left(e^{i\beta}\right)^2 + \dots\dots\dots\infty\right]$$

அடைப்புகளுக்கிடையே உள்ள தொடர் ஓர் ஈருறுப்புத் தொடர் (Binomial Series).

அதில் $m = -\frac{1}{2}$, $z = -e^{i\beta}$, $|z| = |-e^{i\beta}| = 1$,

எனவே, அந்தத் தொடர் ஒருங்கும் தன்மை (குவியும் தன்மை) உடையதாய் இருக்க, $z = -e^{i\beta} \neq -1$,

அ-து, $e^{i\beta} \neq 1 \;\therefore\; \beta \neq 2r\pi$, $r$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியமாக (7.9. ஐப் பார்க்க) இருக்க வேண்டும்.

எனவே,

$$C + iS = e^{i\alpha}\left[1 - e^{i\beta}\right]^{-\frac{1}{2}}, \quad \beta \neq 2r\pi \text{ எனில்,}$$

$$= e^{i\alpha}\left[1 - (\cos\beta + i\sin\beta)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= e^{i\alpha}\left[1 - \cos\beta - i\sin\beta\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= e^{i\alpha}\left[2\sin^2\frac{\beta}{2} - i\,2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= e^{i\alpha}\left[2\sin\frac{\beta}{2}\left(\sin\frac{\beta}{2} - i\cos\frac{\beta}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= e^{i\alpha}\left[2\sin\frac{\beta}{2}\left\{\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= e^{i\alpha}\left(2\sin\frac{\beta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[e^{i\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(2\sin\frac{\beta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{i\alpha}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{4}\right)}$$

$$= \left(2\sin\frac{\beta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{i\left[\alpha+\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{4}\right]}$$

$$= \left(2\sin\frac{\beta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{4}\right)\right.$$
$$\left.+\,i\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{4}\right)\right]$$

கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த,

$$S = \left(2\sin\frac{\beta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\sin\left[\alpha+\frac{\pi-\beta}{4}\right] \qquad (241)$$

**துணை முடிவு :**

$$C = \left(2\sin\frac{\beta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cos\left[\alpha+\frac{\pi-\beta}{4}\right] \qquad (242)$$

**8-5.2.** $n < 1$ **எனில்,**

$$n\cos\alpha+\frac{n(n+1)}{2!}\cos 2\alpha+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\cos 3\alpha + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$$

**என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.**

$$C = n\cos\alpha+\frac{n(n+1)}{2!}\cos 2\alpha+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\cos 3\alpha + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty,$$

$$S = n\sin\alpha+\frac{n(n+1)}{2!}\sin 2\alpha+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\sin 3\alpha + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$$

என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது,

$$C + iS = n[\cos\alpha + i\sin\alpha] + \frac{n(n+1)}{2!}[\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha]$$

$$+ \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}[\cos 3\alpha + i \sin 3\alpha] + \dots\dots \infty$$

$$= n e^{i\alpha} + \frac{n(n+1)}{2!} e^{i2\alpha} + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} e^{i3\alpha} + \dots\dots\dots \infty$$

$$= \Big[ 1 + n e^{i\alpha} + \frac{n(n+1)}{2!}\left(e^{i\alpha}\right)^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\left(e^{i\alpha}\right)^3 + \dots\dots \infty \Big] - 1$$

அடைப்புகளுக்கிடையே உள்ள தொடர் ஓர் ஈருறுப்புத் தொடர் (Binomial Series).

அதில் $m = -n > -1, \quad \because n < 1$ (கொள்கைப்படி)

$z = -e^{i\alpha}, \quad |z| = |-e^{i\alpha}| = 1$

எனவே, அந்தத் தொடர் ஒருங்கும் தன்மை (குவியும் தன்மை) உடையதாய் இருக்க, $z = -e^{i\alpha} \neq -1$

அ-து, $e^{i\alpha} \neq 1 \quad \therefore \alpha \neq 2r\pi$, $r$ ஒரு முழு எண் அல்லது பூச்சியமாக (7. 10 ஐப் பார்க்க) இருக்க வேண்டும்.

எனவே,

$$C + i S = \left(1 - e^{i\alpha}\right)^{-n} - 1, \quad \alpha \neq 2r\pi \text{ எனில்,}$$

$$= (1 - \cos\alpha - i \sin\alpha)^{-n} - 1$$

ஆனல்,

$$1 - \cos\alpha - i\sin\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} - i\,2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\sin\frac{\alpha}{2} - i\cos\frac{\alpha}{2}\right]$$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\therefore (1 - \cos\alpha - i\sin\alpha)^{-n} = \left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{-n} \left[\cos n\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

$\therefore\ C + iS$

$$= \left(2 \sin \frac{\alpha}{2}\right)^{-n} \left[ \cos \left( \frac{n\pi}{2} - \frac{n\alpha}{2} \right) + i \sin \left( \frac{n\pi}{2} - \frac{n\alpha}{2} \right) \right] - 1$$

$$= \frac{1}{2^n \left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^n} \left[ \cos \left( \frac{n\pi}{2} - \frac{n\alpha}{2} \right) + i \sin \left( \frac{n\pi}{2} - \frac{n\alpha}{2} \right) \right] - 1$$

மெய்ப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த,

$$C = \frac{1}{2^n \left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^n} \cos \left( \frac{n\pi}{2} - \frac{n\alpha}{2} \right) - 1$$

**துணை முடிவு :**

$$S = \frac{1}{2^n \left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^n} \sin \left( \frac{n\pi}{2} - \frac{n\alpha}{2} \right)$$

**8-5.3.** $\frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{1}{2.4} \sin 4\theta + \frac{1.3}{2.4.6} \sin 6\theta - \ldots\ldots \infty$

என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

(செ. ப. 1941 செ.)

$$S = \frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{1}{2.4} \sin 4\theta + \frac{1.3}{2.4.6} \sin 6\theta - \ldots\ldots \infty,$$

$$C = 1 + \frac{1}{2} \cos 2\theta - \frac{1}{2.4} \cos 4\theta + \frac{1.3}{2.4.6} \cos 6\theta - \ldots\ldots\ldots \infty$$

என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $C + iS = 1 + \frac{1}{2}(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$

$$- \frac{1}{2.4} (\cos 4\theta + i \sin 4\theta) + \frac{1.3}{2.4.6} (\cos 6\theta + i \sin 6\theta) - \ldots\ldots\ldots \infty$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2} e^{i2\theta} - \frac{1}{2.4} e^{i4\theta} + \frac{1.3}{2.4.6} e^{i6\theta} - \dots\dots\infty$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(e^{i2\theta}\right) - \frac{1}{2.4}\left(e^{i2\theta}\right)^2 + \frac{1.3}{2.4.6}\left(e^{i2\theta}\right)^3 - \dots\dots\infty$$

$$= 1 + \frac{1}{2} z - \frac{1}{2.4} z^2 + \frac{1.3}{2.4.6} z^3 - \dots\dots\infty, \quad z = e^{i2\theta}$$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!} z - \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2!} z^2 + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{3!} z^3 - \dots\dots\infty$$

$$= 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1!} z + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!} z^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!} z^3 + \dots\dots\infty$$

வலக்கைப் பக்கம் உள்ள தொடர் ஓர் ஈருறுப்புத் தொடர்.

அதில் $m = \frac{1}{2} > 0, \; |z| = \left|e^{i2\theta}\right| = 1$

எனவே, அந்தத் தொடர் ஒருங்கும் தன்மை (குவியும் தன்மை) உடையது (7.10 ஐப் பார்க்க).

ஆகவே, $C + iS = (1 + z)^{\frac{1}{2}}$

$$= \left(1 + e^{i2\theta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (1 + \cos 2\theta + i \sin 2\theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (2\cos^2\theta + i\,2\sin\theta\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$= [2\cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{1}{2}}$$

$$= (2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right]$$

கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த,

$$S = (2\cos\theta)^{\frac{1}{2}} \sin\frac{\theta}{2}$$

## பயிற்சி 8 (இ)

**பின்வரும் தொடர்களின் கூட்டுத் தொகைகளைக் காண்க.**

1. $\frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\sin 2\alpha + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\sin 3\alpha + \ldots\ldots \infty$

2. $1 + \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cos 2\theta + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cos 3\theta + \ldots \infty$

3. $\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 3\alpha + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\sin 5\alpha + \ldots\ldots\ldots \infty$

(செ. ப. 1967 செ., 1968 செ.)

4. $\frac{1}{3}\sin\alpha + \frac{1\,.\,4}{3\,.\,6}\sin 2\alpha + \frac{1\,.\,4\,.\,7}{3\,.\,6\,.\,9}\sin 3\alpha + \ldots\ldots\ldots \infty$

5. $1 + \frac{1}{3}x\cos\alpha + \frac{1\,.\,4}{3\,.\,6}x^2\cos 2\alpha + \frac{1\,.\,4\,.\,7}{3\,.\,6\,.\,9}x^3\cos 3\alpha$

$+ \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \infty, \quad |x| < 1$

6. $\sin\alpha + n\sin(\alpha + \beta) + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\sin(\alpha + 2\beta) + \ldots\ldots$

$\ldots\ldots (n+1)$ உறுப்புகள்.

7. $\cos\alpha + n\cos(\alpha + \beta) + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cos(\alpha + 2\beta) + \ldots$

$\ldots\ldots\ldots (n+1)$ உறுப்புகள்.

8. $1 + n\cosh\alpha + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cosh 2\alpha +$

$\ldots\ldots (n+1)$ உறுப்புகள்.

9. $1 + \frac{n}{1}\cos^2\alpha + \frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\cos^2\alpha\,.\,\cos 2\alpha$

$+ \frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\cos^3\alpha\,.\,\cos 3\alpha + \ldots\ldots\ldots \infty$

10. $1 + \frac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{2\,.\,4}\cos 4\theta + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\cos 6\theta$

$- \ldots\ldots\ldots \infty$

11. ABC என்ற முக்கோணத்தில் $a < c$ எனில்,

(i) $\frac{\cos nA}{b^n} = \frac{1}{c^n}\Big[\, 1 + n\frac{a}{c}\cos B$

$+ \frac{n(n+1)}{2\,!}\frac{a^2}{c^2}\cos 2B + \ldots\ldots\ldots \infty \,\Big]$

(ii) $$\frac{\sin nA}{b^n} = \frac{1}{c^n}\left[ n \frac{a}{c}\sin B + \frac{n(n+1)}{2!}\frac{a^2}{c^2}\sin 2B + \ldots\ldots\ldots \infty \right]$$

என நிறுவுக.

### விடைகள்

1. $\alpha \neq 2n\pi$ எனில், $S_\infty = \dfrac{1}{\sqrt{2\sin\frac{\alpha}{2}}}\sin\dfrac{(\pi-\alpha)}{4}$.

$\alpha = 2n\pi$ எனில், $S_\infty = 0$

2. $\theta \neq 2n\pi$ எனில், $S_\infty = \left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cos\dfrac{(\pi-\theta)}{4}$

$\theta = 2n\pi$ எனில், கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர் ஒரு விரி தொடராகும்.

3. $$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2\sin\alpha}}$$

4. $$\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \sin\frac{(\pi-\alpha)}{6}$$

5. $$\frac{\cos\frac{\theta}{3}}{\sqrt{1-2x\cos\alpha+x^2}}, \tan\theta = \frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}$$

6. $$\left(2\cos\frac{\beta}{2}\right)^n \sin\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)$$

7. $$\left(2\cos\frac{\beta}{2}\right)^n \cos\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)$$

8. $$2^n\cosh^n\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cosh\left(\frac{n\alpha}{2}\right)$$

9. $$\frac{\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin^n\alpha}$$

10. $\sqrt{2\cos\theta}.\ \cos\dfrac{\theta}{2}$

## 8.6. அடுக்குக் குறித் தொடரைச் சார்ந்த தொடர்கள்

**8.6.1.** $\sin\alpha + \dfrac{x}{1!}\sin(\alpha+\beta) + \dfrac{x^2}{2!}\sin(\alpha+2\beta) + \ldots\ldots\infty$ என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

(செ. ப. 1938 மா.)

$$S = \sin\alpha + \frac{x}{1!}\sin(\alpha+\beta) + \frac{x^2}{2!}\sin(\alpha+2\beta) + \ldots\ldots\infty,$$

$$C = \cos\alpha + \frac{x}{1!}\cos(\alpha+\beta) + \frac{x^2}{2!}\cos(\alpha+2\beta) + \ldots\ldots\infty$$

என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $C + iS = [\cos\alpha + i\sin\alpha] +$

$$\frac{x}{1!}[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)] + \frac{x^2}{2!}[\cos(\alpha+2\beta) + i\sin(\alpha+2\beta)] + \ldots\ldots\infty$$

$$= e^{i\alpha} + \frac{x}{1!}e^{i(\alpha+\beta)} + \frac{x^2}{2!}e^{i(\alpha+2\beta)} + \ldots\ldots\infty$$

$$= e^{i\alpha}\left[1 + \frac{x}{1!}e^{i\beta} + \frac{x^2}{2!}e^{i2\beta} + \ldots\ldots\infty\right]$$

$$= e^{i\alpha}\left[1 + \frac{(xe^{i\beta})}{1!} + \frac{(xe^{i\beta})^2}{2!} + \ldots\ldots\infty\right]$$

$$= e^{i\alpha}\left[1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\ldots\infty\right], \quad z = xe^{i\beta}$$

$$= e^{i\alpha}\,e^{z}$$

$$= e^{i\alpha}.\,e^{xe^{i\beta}}$$

$$= e^{i\alpha + xe^{i\beta}}$$

$$= e^{i\alpha + x(\cos\beta + i\sin\beta)}$$

$$= e^{x\cos\beta + i(\alpha + x\sin\beta)}$$

$$= e^{x\cos\beta}\, e^{i(\alpha + x\sin\beta)}$$

$$= e^{x\cos\beta}\,[\cos(\alpha + x\sin\beta) + i\sin(\alpha + x\sin\beta)]$$

கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த,

$$S = e^{x\cos\beta}\sin(\alpha + x\sin\beta) \tag{243}$$

**துணை முடிவு :**

$$C = e^{x\cos\beta}\cos(\alpha + x\sin\beta) \tag{244}$$

**8-6.2.** $1 - \frac{\cos\alpha}{1!}\cos\beta + \frac{\cos^2\alpha}{2!}\cos 2\beta - \frac{\cos^3\alpha}{3!}\cos 3\beta$ $+ \ldots\ldots \infty$ **என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.**

(செ. ப. 1966 செ.)

$$C = 1 - \frac{\cos\alpha}{1!}\cos\beta + \frac{\cos^2\alpha}{2!}\cos 2\beta - \frac{\cos^3\alpha}{3!}\cos 3\beta + \ldots\ldots\infty,$$

$$S = -\frac{\cos\alpha}{1!}\sin\beta + \frac{\cos^2\alpha}{2!}\sin 2\beta - \frac{\cos^3\alpha}{3!}\sin 3\beta + \ldots\ldots\infty$$

என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $C + iS = 1 - \frac{\cos\alpha}{1!}[\cos\beta + i\sin\beta]$

$$+ \frac{\cos^2\alpha}{2!}[\cos 2\beta + i\sin 2\beta] - \frac{\cos^3\alpha}{3!}[\cos 3\beta + i\sin 3\beta] + \ldots\ldots\infty$$

$$= 1 - \frac{\cos\alpha}{1!}e^{i\beta} + \frac{\cos^2\alpha}{2!}e^{i2\beta} - \frac{\cos^3\alpha}{3!}e^{i3\beta} + \ldots\ldots\infty$$

$$= 1 - \frac{(\cos\alpha\,.\,e^{i\beta})}{1!} + \frac{(\cos\alpha\,.\,e^{i\beta})^2}{2!} - \frac{(\cos\alpha\,.\,e^{i\beta})^3}{3!} + \ldots\ldots\infty$$

$$= 1 - \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \ldots\ldots\infty, \quad z = \cos\alpha\,.\,e^{i\beta}$$

$$= e^{-z}$$

$$= e^{-\cos\alpha} . e^{i\beta}$$

$$= e^{-\cos\alpha} [\cos\beta + i\sin\beta]$$

$$= e^{-\cos\alpha\cos\beta - i\cos\alpha\sin\beta}$$

$$= e^{-\cos\alpha\cos\beta} . e^{-i\cos\alpha\sin\beta}$$

$$= e^{-\cos\alpha\cos\beta} [\cos(\cos\alpha\sin\beta) - i\sin(\cos\alpha\sin\beta)]$$

மெய்ப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த,

$$C = e^{-\cos\alpha\cos\beta} . \cos(\cos\alpha\sin\beta)$$

**8-6.3.** $x\cosh\alpha + \frac{x^2}{2!}\cosh 2\alpha + \frac{x^3}{3!}\cosh 3\alpha + \ldots\ldots\ldots \infty$,

**என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.**

(செ. ப. 1958 மா.)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடரின் கூட்டுத் தொகை $C$ எனில்,

$$C = x\cosh\alpha + \frac{x^2}{2!}\cosh 2\alpha + \frac{x^3}{3!}\cosh 3\alpha + \ldots\infty$$

$$= \frac{x}{1!}\left(\frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}\right) + \frac{x^2}{2!}\left(\frac{e^{2\alpha} + e^{-2\alpha}}{2}\right)$$

$$+ \frac{x^3}{3!}\left(\frac{e^{3\alpha} + e^{-3\alpha}}{2}\right) + \ldots\ldots\infty$$

$$\therefore\ 2C = \frac{x}{1!}\left(e^{\alpha} + e^{-\alpha}\right) + \frac{x^2}{2!}\left(e^{2\alpha} + e^{-2\alpha}\right)$$

$$+ \frac{x^3}{3!}\left(e^{3\alpha} + e^{-3\alpha}\right) + \ldots\ldots\infty$$

$$= \left[\frac{x}{1!}e^{\alpha} + \frac{x^2}{2!}e^{2\alpha} + \frac{x^3}{3!}e^{3\alpha} + \ldots\ldots\infty\right]$$

$$+ \left[\frac{x}{1!}e^{-\alpha} + \frac{x^2}{2!}e^{-2\alpha} + \frac{x^3}{3!}e^{-3\alpha} + \ldots\ldots\infty\right]$$

$$= \left[\frac{x e^{\alpha}}{1!} + \frac{(x e^{\alpha})^2}{2!} + \frac{(x e^{\alpha})^3}{3!} + \ldots\ldots \infty\right]$$

$$+ \left[\frac{x e^{-\alpha}}{1!} + \frac{(x e^{-\alpha})^2}{2!} + \frac{(x e^{-\alpha})^3}{3!} + \ldots\ldots \infty\right]$$

$$= \left[e^{x e^{\alpha}} - 1\right] + \left[e^{x e^{-\alpha}} - 1\right]$$

$$= e^{x e^{\alpha}} + e^{x e^{-\alpha}} - 2$$

$$\therefore C = \frac{1}{2}\left[e^{x e^{\alpha}} + e^{x e^{-\alpha}}\right] - 1 \qquad (245)$$

## பயிற்சி 8 (ஈ)

பின்வரும் தொடர்களின் கூட்டுத் தொகைகளைக் காண்க.

1. $1 + \frac{\cos\theta}{1!} + \frac{\cos 2\theta}{2!} + \frac{\cos 3\theta}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$

2. $\frac{\sin\theta}{1!} + \frac{\sin 2\theta}{2!} + \frac{\sin 3\theta}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$

3. $\frac{\cos\theta}{1!} + \frac{\cos 2\theta}{2!} + \frac{\cos 3\theta}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$

(செ. ப. 1965 செ.)

4. $\sin\theta + \frac{\cos\theta}{1!}\sin 2\theta + \frac{\cos^2\theta}{2!}\sin 3\theta + \ldots\ldots\ldots \infty$

5. $\cos\theta + \frac{\sin\theta}{1!}\cos 2\theta + \frac{\sin^2\theta}{2!}\cos 3\theta + \frac{\sin^3\theta}{3!}\cos 4\theta + \ldots\ldots\ldots \infty$

(செ. ப. 1952 மா.)

6. $c\sin\alpha + \frac{c^2}{2!}\sin 2\alpha + \frac{c^3}{3!}\sin 3\alpha + \ldots\ldots\ldots \infty$

7. $1 + c\cos\alpha + \frac{c^2}{2!}\cos 2\alpha + \frac{c^3}{3!}\cos 3\alpha + \ldots\ldots \infty$

8. $\cos\theta\sin\theta + \frac{\cos^2\theta}{2!}\sin 2\theta + \frac{\cos^3\theta}{3!}\sin 3\theta + \ldots\ldots \infty$

9. $1 + \cos\theta \tan\theta + \frac{1}{2!}\cos 2\theta \tan^2\theta + \frac{1}{3!}\cos 3\theta \tan^3\theta + \ldots\ldots \infty$

10. $\sin\theta - \frac{\sin 2\theta}{2!} + \frac{\sin 3\theta}{3!} - \frac{\sin 4\theta}{4!} + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$

11. $1 + \frac{\cosh\alpha}{1!} + \frac{\cosh 2\alpha}{2!} + \frac{\cosh 3\alpha}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$

(செ. ப. 1957)

12. $\frac{\sinh\alpha}{1!} + \frac{\sinh 2\alpha}{2!} + \frac{\sinh 3\alpha}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$

13. $\cosh\theta + \frac{\sin\theta}{1!}\cosh 2\theta + \frac{\sin^2\theta}{2!}\cosh 3\theta + \ldots\ldots \infty$

(செ. ப. 1951 செ.)

14. $s = 1 + \frac{z\cos\theta}{1!} + \frac{z^2\cos 2\theta}{2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty,$

$\sigma = \frac{z\sin\theta}{1!} + \frac{z^2\sin 2\theta}{2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$ எனில்,

$z\sin\theta = \tan^{-1}\frac{\sigma}{s},$

$z\cos\theta = \frac{1}{2}\log(s^2 + \sigma^2)$ என நிறுவுக.

(செ. ப. 1948 செ.)

## விடைகள்

1. $e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)$
2. $e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)$
3. $e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta) - 1$
4. $e^{\cos^2\theta}\sin(\theta + \sin\theta\cos\theta)$
5. $e^{\sin\theta\cos\theta}\cos(\theta + \sin^2\theta)$
6. $e^{c\cos\alpha}\sin(c\sin\alpha)$
7. $e^{c\cos\alpha}\cos(c\sin\alpha)$

8. $e^{\cos^2 \theta} \sin \left( \frac{\sin 2\theta}{2} \right)$

9. $e^{\sin \theta} \cos (\sin \theta . \tan \theta)$

10. $e^{-\cos \theta} \sin (\sin \theta)$

11. $e^{\cosh \alpha} \cosh (\sinh \alpha)$

12. $e^{\cosh \alpha} \sinh (\sinh \alpha)$

13. $e^{\sin \theta \cosh \theta} \cosh (\theta + \sin \theta \sinh \theta)$

**8.7. சைன், கொசைன், அதிபரவளை சைன், அதிபரவளைக் கொசைன் தொடர்களைச் சார்ந்த தொடர்கள்**

**8-7.1.** $\sin \alpha - \frac{1}{3!} \sin (\alpha + 2\beta) + \frac{1}{5!} \sin (\alpha + 4\beta) - \ldots$ ........ $\infty$ என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

$$C = \cos \alpha - \frac{1}{3!} \cos (\alpha + 2\beta) + \frac{1}{5!} \cos (\alpha + 4\beta) - \ldots\ldots \infty$$

$$S = \sin \alpha - \frac{1}{3!} \sin (\alpha + 2\beta) + \frac{1}{5!} \sin (\alpha + 4\beta) - \ldots\ldots \infty$$

என இருக்கட்டும்,

இப்பொழுது,

$$C + iS = [\cos \alpha + i \sin \alpha] - \frac{1}{3!} [\cos (\alpha + 2\beta) + i \sin (\alpha + 2\beta)] + \frac{1}{5!} [\cos (\alpha + 4\beta) + i \sin (\alpha + 4\beta)] - \ldots\ldots \infty$$

$$= e^{i\alpha} - \frac{1}{3!} e^{i(\alpha + 2\beta)} + \frac{1}{5!} e^{i(\alpha + 4\beta)} - \ldots\ldots \infty$$

$$= e^{i\alpha} \left[ 1 - \frac{1}{3!} e^{i2\beta} + \frac{1}{5!} e^{i4\beta} - \ldots\ldots \infty \right]$$

$$= \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} \left[ \frac{e^{i\beta}}{1!} - \frac{1}{3!} e^{i3\beta} + \frac{1}{5!} e^{i5\beta} - \ldots\ldots \infty \right]$$

$$= e^{i(\alpha-\beta)}\left[\frac{e^{i\beta}}{1!} - \frac{(e^{i\beta})^3}{3!} + \frac{(e^{i\beta})^5}{5!} - \dots\dots\dots \infty\right]$$

$$= e^{i(\alpha-\beta)} \sin\left(e^{i\beta}\right)$$ [சூத்திரம் (112)-ன் படி]

$$= e^{i(\alpha-\beta)} \sin(\cos\beta + i\sin\beta)$$

$$= e^{i(\alpha-\beta)}[\sin(\cos\beta)\,.\,\cos(i\sin\beta) + \cos(\cos\beta)\,.\,\sin(i\sin\beta)]$$

$$= [\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\times [\sin(\cos\beta).\ \cosh(\sin\beta) + i\cos(\cos\beta)\sinh(\sin\beta)]$$

கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த,

$$S = \sin(\alpha-\beta).\ \sin(\cos\beta).\ \cosh(\sin\beta) + \cos(\alpha-\beta)\cos(\cos\beta)\sinh(\sin\beta) \dots\dots (246)$$

**துணை முடிவு :**

$$C = \cos(\alpha-\beta).\ \sin(\cos\beta).\ \cosh(\sin\beta) - \sin(\alpha-\beta).\ \cos(\cos\beta).\ \sinh(\sin\beta) \dots\dots (247)$$

**8-7.2.** $1 - \frac{\cos 2\theta}{2!} + \frac{\cos 4\theta}{4!} - \dots\dots\dots\dots \infty$, **என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.**

[செ. ப. 1951; 1958 மா.; 1959 மா.; 1960 மா.]

$$C = 1 - \frac{\cos 2\theta}{2!} + \frac{\cos 4\theta}{4!} - \dots\dots\dots \infty,$$

$$S = -\frac{\sin 2\theta}{2!} + \frac{\sin 4\theta}{4!} - \dots\dots\dots \infty$$

என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $C + iS = 1 - \frac{1}{2!}(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$

$$+ \frac{1}{4!}(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) - \dots\infty$$

$$= 1 - \frac{1}{2!}e^{i2\theta} + \frac{1}{4!}e^{i4\theta} - \dots\dots\dots \infty$$

$$= 1 - \frac{(e^{i\theta})^2}{2!} + \frac{(e^{i\theta})^4}{4!} - \dots\dots\dots\dots \infty$$

$= \cos\left(e^{i\theta}\right)$ [சூத்திரம் (110)-ன் படி]

$= \cos(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= \cos(\cos\theta)\cos(i\sin\theta) - \sin(\cos\theta)\sin(i\sin\theta)$

$= \cos(\cos\theta)\cosh(\sin\theta) - i\sin(\cos\theta)\sinh(\sin\theta)$

மெய்ப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த,

$C = \cos(\cos\theta).\cosh(\sin\theta)$

**8-7.3.** $c\sin\theta + \frac{c^3}{3!}\sin 3\theta + \frac{c^5}{5!}\sin 5\theta + \ldots\ldots\ldots \infty$ **என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.**

$\gamma = c\cos\theta + \frac{c^3}{3!}\cos 3\theta + \frac{c^5}{5!}\cos 5\theta + \ldots\ldots\ldots \infty,$

$\sigma = c\sin\theta + \frac{c^3}{3!}\sin 3\theta + \frac{c^5}{5!}\sin 5\theta + \ldots\ldots\ldots \infty$

என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $\gamma + i\sigma = c[\cos\theta + i\sin\theta] +$

$\frac{c^3}{3!}[\cos 3\theta + i\sin 3\theta] + \frac{c^5}{5!}[\cos 5\theta + i\sin 5\theta] + \ldots\ldots \infty$

$= c\,e^{i\theta} + \frac{c^3}{3!}e^{i3\theta} + \frac{c^5}{5!}e^{i5\theta} + \ldots\ldots\ldots \infty$

$= \frac{\left(ce^{i\theta}\right)}{1!} + \frac{\left(ce^{i\theta}\right)^3}{3!} + \frac{\left(ce^{i\theta}\right)^5}{5!} + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$

$= \sinh\left(ce^{i\theta}\right)$ [சூத்திரம் (156)-ன் படி]

$= \sinh(c\cos\theta + ic\sin\theta)$

$= \frac{i}{i}\sinh(c\cos\theta + ic\sin\theta)$

$= \frac{1}{i}\sin i(c\cos\theta + ic\sin\theta)$

$= \frac{1}{i}\sin(ic\cos\theta - c\sin\theta)$

$= \frac{1}{i}[\sin(ic\cos\theta).\cos(c\sin\theta) - \cos(ic\cos\theta).\sin(c\sin\theta)]$

$$= \frac{1}{i}\ [i \sinh (c \cos \theta).\ \cos (c \sin \theta) - \cosh (c \cos \theta).$$
$$\sin (c \sin \theta)\ ]$$

$$= \frac{1}{i}\ [i \sinh (c \cos \theta).\ \cos (c \sin \theta) + i^2 \cosh (c \cos \theta).$$
$$\sin (c \sin \theta)\ ]$$

$$= \sinh (c \cos \theta)\ \cos (c \sin \theta) + i \cosh (c \cos \theta).\ \sin (c \sin \theta)$$

கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த,

$$\sigma = \cosh (c \cos \theta).\ \sin (c \sin \theta)$$

**8-7.4.** $1 + \frac{c^2}{2!} \cos 2\theta + \frac{c^4}{4!} \cos 4\theta + \frac{c^6}{6!} \cos 6\theta + \ldots\ldots\ldots \infty,$

என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

(செ. ப. 1951 மா.; 1964 ஏ.)

$$\gamma = 1 + \frac{c^2}{2!} \cos 2\theta + \frac{c^4}{4!} \cos 4\theta + \frac{c^6}{6!} \cos 6\theta + \ldots\ldots \infty,$$

$$\sigma = \frac{c^2}{2!} \sin 2\theta + \frac{c^4}{4!} \sin 4\theta + \frac{c^6}{6!} \sin 6\theta + \ldots\ldots \infty$$

என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $\gamma + i\sigma = 1 + \frac{c^2}{2!} (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$

$$+ \frac{c^4}{4!} (\cos 4\theta + i \sin 4\theta) + \frac{c^6}{6!} (\cos 6\theta + i \sin 6\theta)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots \infty$$

$$= 1 + \frac{c^2}{2!} e^{i 2\theta} + \frac{c^4}{4!} e^{i 4\theta} + \frac{c^6}{6!} e^{i 6\theta} + \ldots\ldots\ldots \infty$$

$$= 1 + \frac{\left(c e^{i\theta}\right)^2}{2!} + \frac{\left(c e^{i\theta}\right)^4}{4!} + \frac{\left(c e^{i\theta}\right)^6}{6!} + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$$

$$= \cosh \left(c e^{i\theta}\right)$$ [ சூத்திரம் (157)-ன் படி ]

$$= \cosh (c \cos \theta + i\ c \sin \theta)$$

$$= \cos i\ (c \cos \theta + i\ c \sin \theta)$$

$$= \cos (i\ c \cos \theta - c \sin \theta)$$

$$= \cos (i\ c \cos \theta).\ \cos (c \sin \theta) + \sin (i\ c \cos \theta).\ \sin (c \sin \theta)$$

$$= \cosh (c \cos \theta).\ \cos (c \sin \theta) + i \sinh (c \cos \theta).\ \sin (c \sin \theta)$$

மெய்ப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த,

$$\gamma = \cosh (c \cos \theta).\ \cos (c \sin \theta)$$

8-7.5. $\frac{\sin\alpha}{1!}+\frac{\sin 5\alpha}{5!}+\frac{\sin 9\alpha}{9!}+\dots\dots\infty$ என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

$$C=\frac{\cos\alpha}{1!}+\frac{\cos 5\alpha}{5!}+\frac{\cos 9\alpha}{9!}+\dots\dots\infty,$$

$$S=\frac{\sin\alpha}{1!}+\frac{\sin 5\alpha}{5!}+\frac{\sin 9\alpha}{9!}+\dots\dots\infty$$

என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது,

$$C+iS=(\cos\alpha+i\sin\alpha)+\frac{1}{5!}(\cos 5\alpha+i\sin 5\alpha)$$

$$+\frac{1}{9!}(\cos 9\alpha+i\sin 9\alpha)+\dots\dots\infty$$

$$=e^{i\alpha}+\frac{1}{5!}e^{i5\alpha}+\frac{1}{9!}e^{i9\alpha}+\dots\dots\infty$$

$$=\frac{(e^{i\alpha})}{1!}+\frac{(e^{i\alpha})^5}{5!}+\frac{(e^{i\alpha})^9}{9!}+\dots\dots\infty$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin\left(e^{i\alpha}\right)+\sinh\left(e^{i\alpha}\right)\right]$$

[சூத்திரங்கள் (112), (156)-ன் படி]

$$=\frac{1}{2}\left[\sin(\cos\alpha+i\sin\alpha)+\sinh(\cos\alpha+i\sin\alpha)\right]$$

ஆனால், $\sin(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

$$=\sin(\cos\alpha)\cos(i\sin\alpha)+\cos(\cos\alpha).\sin(i\sin\alpha)$$

$$=\sin(\cos\alpha)\cosh(\sin\alpha)+i\cos(\cos\alpha)\sinh(\sin\alpha)$$

$\sinh(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

$$=\sinh(\cos\alpha).\cos(\sin\alpha)+i\cosh(\cos\alpha).\sin(\sin\alpha)$$

[8.7.3 ஐப் பார்க்க]

$\therefore\quad C+iS$

$$=\frac{1}{2}\Big[\sin(\cos\alpha).\cosh(\sin\alpha)+i\cos(\cos\alpha).\sinh(\sin\alpha)$$

$$+\sinh(\cos\alpha).\cos(\sin\alpha)+i\cosh(\cos\alpha).\sin(\sin\alpha)\Big]$$

கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த,

$$S = \frac{1}{2}\left[\cos(\cos\alpha).\ \sinh(\sin\alpha) + \cosh(\cos\alpha).\ \sin(\sin\alpha)\right]$$

## பயிற்சி 8 (உ)

**பின்வரும் தொடர்களின் கூட்டுத் தொகைகளைக் காண்க.**

1. $\frac{\sin\theta}{1!} - \frac{\sin 3\theta}{3!} + \frac{\sin 5\theta}{5!} - \ldots\ldots\ldots \infty$

2. $\frac{\cos\alpha}{1!} - \frac{\cos 3\alpha}{3!} + \frac{\cos 5\alpha}{5!} - \ldots\ldots\ldots \infty$

3. $\sin x - \frac{\sin 3x}{2!} + \frac{\sin 5x}{4!} - \ldots\ldots\ldots \infty$

4. $\sin\alpha - \frac{\sin(\alpha + 2\beta)}{2!} + \frac{\sin(\alpha + 4\beta)}{4!} - \ldots\ldots\ldots \infty$

5. $\cos\alpha - \frac{\cos(\alpha + 2\beta)}{2!} + \frac{\cos(\alpha + 4\beta)}{4!} - \ldots\ldots\ldots \infty$

6. $\cos x + \frac{\cos 3x}{3!} + \frac{\cos 5x}{5!} + \ldots\ldots\ldots \infty$

7. $c\cos\alpha + \frac{c^3}{3!}\cos 3\alpha + \frac{c^5}{5!}\cos 5\alpha + \ldots\ldots\ldots \infty$

8. $\frac{3\sin\theta}{1!} + \frac{5\sin 3\theta}{3!} + \frac{7\sin 5\theta}{5!} + \ldots\ldots\ldots \infty$

9. $\frac{5\cos\theta}{1!} + \frac{7\cos 3\theta}{3!} + \frac{9\cos 5\theta}{5!} + \ldots\ldots\ldots \infty$

10. $1 + \frac{\cos 2\theta}{2!} + \frac{\cos 4\theta}{4!} + \frac{\cos 6\theta}{6!} + \ldots\ldots\ldots \infty$

11. $\frac{\sin 2\theta}{2!} + \frac{\sin 4\theta}{4!} + \frac{\sin 6\theta}{6!} + \ldots\ldots\ldots \infty$

12. $\frac{x^2\sin 2\theta}{2!} + \frac{x^4\sin 4\theta}{4!} + \frac{x^6\sin 6\theta}{6!} + \ldots\ldots\ldots \infty$

13. $\frac{\cos\alpha}{1!} + \frac{\cos 5\alpha}{5!} + \frac{\cos 9\alpha}{9!} + \ldots\ldots\ldots \infty$

14. $1 + \frac{\cos 4\theta}{4!} + \frac{\cos 8\theta}{8!} + \ldots\ldots\ldots \infty$

## விடைகள்

1. $\cos(\cos\theta) \,.\, \sinh(\sin\theta)$
2. $\sin(\cos\alpha) \,.\, \cosh(\sin\alpha)$
3. $\sin x .\cos(\cos x).\cosh(\sin x)$

   $- \cos x .\sin(\cos x).\sinh(\sin x)$
4. $\sin\alpha .\cos(\cos\beta).\cosh(\sin\beta)$

   $- \cos\alpha .\sin(\cos\beta).\sinh(\sin\beta)$
5. $\cos\alpha .\cos(\cos\beta).\cosh(\sin\beta)$

   $+ \sin\alpha .\sin(\cos\beta).\sinh(\sin\beta)$
6. $\sinh(\cos x).\cos(\sin x)$
7. $\cos(c\sin\alpha).\sinh(c\cos\alpha)$
8. $\frac{1}{2}e^{\cos\theta}[\cos(\theta+\sin\theta)+2\sin(\sin\theta)]$

   $+\frac{1}{2}e^{-\cos\theta}[\cos(\theta-\sin\theta)+2\sin(\sin\theta)]$
9. $\frac{1}{2}e^{\cos\theta}[\cos(\theta+\sin\theta)+4\cos(\sin\theta)]$

   $+\frac{1}{2}e^{-\cos\theta}[\cos(\theta-\sin\theta)-4\cos(\sin\theta)]$
10. $\cosh(\cos\theta).\cos(\sin\theta)$
11. $\sinh(\cos\theta).\sin(\sin\theta)$
12. $\sinh(x\cos\theta).\sin(x\sin\theta)$
13. $\frac{1}{2}[\sin(\cos\alpha).\cosh(\sin\alpha)+\sinh(\cos\alpha).$

    $\cos(\sin\alpha)]$
14. $\frac{1}{2}[\cosh(\cos\theta).\cos(\sin\theta)+\cos(\cos\theta).\cosh(\sin\theta)]$

### 8.8. மடக்கைத் தொடரைச் சார்ந்த தொடர்கள்

**8-8.1.** $|c|<1$ எனில், $\cos\alpha - c\cos(\alpha+\beta)$

$+\frac{c^2}{2}\cos(\alpha+2\beta) - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \infty$ என்ற தொடரின்

கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

(செ. ப. 1966 ஏ.)

$$\gamma = \cos \alpha - c \cos (\alpha + \beta) + \frac{c^2}{2} \cos (\alpha + 2\beta) - \ldots\ldots \infty$$

$$\sigma = \sin \alpha - c \sin (\alpha + \beta) + \frac{c^2}{2} \sin (\alpha + 2\beta) - \ldots\ldots \infty$$

என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $\gamma + i\sigma = [\cos \alpha + i \sin \alpha] - c [\cos (\alpha + \beta)$

$$+ i \sin (\alpha + \beta)] + \frac{c^2}{2} [\cos (\alpha + 2\beta) + i \sin (\alpha + 2\beta)] - \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$$

$$= e^{i\alpha} - c\, e^{i(\alpha + \beta)} + \frac{c^2}{2} e^{i(\alpha + 2\beta)} - \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$$

$$= e^{i\alpha} - e^{i\alpha} \left[ c\, e^{i\beta} - \frac{c^2}{2} e^{i 2\beta} + \frac{c^3}{3} e^{i 3\beta} - \ldots\ldots\ldots\ldots \infty \right]$$

$$= e^{i\alpha} - e^{i\alpha} \left[ (c\, e^{i\beta}) - \frac{(c\, e^{i\beta})^2}{2} + \frac{(c\, e^{i\beta})^3}{3} - \ldots\ldots\ldots\ldots \infty \right]$$

ஆனால், $| c\, e^{i\beta} | = | c | < 1$ (கொள்கை)

$$\therefore \gamma + i\alpha = e^{i\alpha} - e^{i\alpha} \log \left(1 + c\, e^{i\beta}\right)$$

[ 7. 6. ஐப் பார்க்க ]

$$1 + c\, e^{i\beta} = 1 + c (\cos \beta + i \sin \beta)$$
$$= 1 + c \cos \beta + i c \sin \beta$$
$$= r (\cos \theta + i \sin \theta)$$ என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $r^2 = (1 + c \cos \beta)^2 + c^2 \sin^2 \beta$

$$= 1 + c^2 + 2c \cos \beta$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{c \sin \beta}{1 + c \cos \beta}$$

$$\log \left(1 + c\, e^{i\beta}\right) = \log r (\cos \theta + i \sin \theta)$$
$$= (\log_e r) + i\theta$$ [ சூத்திரம் (205)-ன் படி. ]

$$\therefore\ \gamma + i\sigma = e^{i\alpha} - e^{i\alpha}\left[(\log_e r) + i\theta\right]$$
$$= e^{i\alpha}\left[1 - (\log_e r) - i\theta\right]$$
$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\ \left[(1 - \log_e r) - i\theta\right]$$

மெய்ப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த,

$$\gamma = \cos\alpha\ (1 - \log_e r) + \theta.\ \sin\alpha$$
$$= \cos\alpha\left[1 - \frac{1}{2}\log(1 + c^2 + 2c\cos\beta)\right]$$
$$+ \sin\alpha.\ \tan^{-1}\frac{c\sin\beta}{1 + c\cos\beta} \qquad (248)$$

**துணை முடிவு :**

$$\sigma = \sin\alpha\ [1 - \log_e r] - \theta.\cos\alpha$$
$$= \sin\alpha\left[1 - \frac{1}{2}\log(1 + c^2 + 2c\cos\beta)\right]$$
$$- \cos\alpha.\ \tan^{-1}\frac{c\sin\beta}{1 + c\cos\beta} \qquad (249)$$

**8-8.2.** $\log(\cos\theta) = -\log_e 2 + \cos 2\theta - \frac{1}{2}\cos 4\theta + \frac{1}{3}\cos 6\theta - \ldots\ldots\ldots \infty$ என நிறுவுக.

(ம. ப. 1971 செ.) (செ. ப. 1969 ஏ.)

$$C = \cos 2\theta - \frac{1}{2}\cos 4\theta + \frac{1}{3}\cos 6\theta - \ldots\ldots\ldots \infty.$$

$$S = \sin 2\theta - \frac{1}{2}\sin 4\theta + \frac{1}{3}\sin 6\theta - \ldots\ldots\ldots \infty$$

என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $C + iS = (\cos 2\theta + i\sin 2\theta) -$

$$\frac{1}{2}(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) + \frac{1}{3}(\cos 6\theta + i\sin 6\theta) - \ldots\ldots \infty$$

$$= e^{i2\theta} - \frac{1}{2}e^{i4\theta} + \frac{1}{3}e^{i6\theta} - \ldots\ldots\ldots \infty$$

$$= e^{i2\theta} - \frac{1}{2}\left(e^{i2\theta}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(e^{i2\theta}\right)^3 - \ldots\ldots \infty$$

$$= \log\left(1 + e^{i2\theta}\right)$$ [சூத்திரம் (222)-ன் படி]

$= \log(1 + \cos 2\theta + i \sin 2\theta)$

$= \log(2\cos^2\theta + i\, 2\sin\theta\cos\theta)$

$= \log 2\cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= \log 2\cos\theta .\, e^{i\theta}$

$= \log_e(2\cos\theta) + i\,\theta$ [சூத்திரம் (205)-ன் படி]

மெய்ப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த,

$$\cos 2\theta - \frac{1}{2}\cos 4\theta + \frac{1}{3}\cos 6\theta - \dots \infty = \log_e(2\cos\theta)$$

$$= \log_e 2 + \log_e \cos\theta$$

$$\therefore \log_e\cos\theta = -\log_e 2 + \cos 2\theta - \frac{1}{2}\cos 4\theta$$

$$+ \frac{1}{3}\cos 6\theta - \dots\dots\dots \infty$$

**8-8.3.** $|c| < 1$ எனில் $c\sin\theta + \frac{c^2}{2}\sin 2\theta + \frac{c^3}{3}\sin 3\theta$ $+ \dots\dots \infty$ **என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.**

(செ. ப. 1956 மா.)

(செ. ப. 1964 செ.)

$$\gamma = c\cos\theta + \frac{c^2}{2}\cos 2\theta + \frac{c^3}{3}\cos 3\theta + \dots\dots\dots \infty,$$

$$\sigma = c\sin\theta + \frac{c^2}{2}\sin 2\theta + \frac{c^3}{3}\sin 3\theta + \dots\dots\dots \infty$$

என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $\gamma + i\sigma = c(\cos\theta + i\sin\theta) +$

$$\frac{c^2}{2}(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \frac{c^3}{3}(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) + \dots\dots\dots \infty$$

$$= c\,e^{i\theta} + \frac{c^2}{2}e^{i2\theta} + \frac{c^3}{3}e^{i3\theta} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \infty$$

$$= ce^{i\theta} + \frac{(ce^{i\theta})^2}{2} + \frac{(ce^{i\theta})^3}{3} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \infty$$

ஆனால் $|ce^{i\theta}| = |c| < 1$ (கொள்கை).

$$\therefore \gamma + i\sigma = -\log(1 - ce^{i\theta})$$

$$1 - c\,e^{i\theta} = 1 - c\cos\theta - i\,c\sin\theta$$
$$= (1 - c\cos\theta) + i\,(-c\sin\theta)$$
$$= r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$ என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $r^2 = (1 - c\cos\theta)^2 + (-c\sin\theta)^2$
$$= 1 + c^2 - 2c\cos\theta$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{-c\sin\theta}{1 - c\cos\theta}\right)$$
$$= -\tan^{-1}\frac{c\sin\theta}{1 - c\cos\theta}$$

$$\log\left(1 - ce^{i\theta}\right) = \log r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$
$$= (\log^e r) + i\,\alpha$$ [சூத்திரம் (205)-ன் படி]
$$= \frac{1}{2}\log(1 + c^2 - 2c\cos\theta) - i\tan^{-1}\frac{c\sin\theta}{1 - c\cos\theta}$$

$$\gamma + i\sigma = -\log(1 - ce^{i\theta})$$
$$= -\frac{1}{2}\log_e(1 + c^2 - 2c\cos\theta) + i\tan^{-1}\frac{c\sin\theta}{1 - c\cos\theta}$$

கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த,
$$\sigma = \tan^{-1}\frac{c\sin\theta}{1 - c\cos\theta}$$

**துணை முடிவு :**
$$\gamma = -\frac{1}{2}\log_e(1 + c^2 - 2c\cos\theta)$$

**8-8.4.** **ABC என்ற முக்கோணத்தில்** $a > b$ எனில், $\log_e c = \log_e a - \frac{b}{a}\cos C - \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\cos 2C - \frac{1}{3}\frac{b^3}{a^3}\cos 3C - \ldots\infty$ என நிறுவுக. (செ. ப. 1970 ஏ.)

$a > b$ (கொள்கை)
$$\therefore\ \frac{b}{a} < 1.$$

இப்பொழுது,

$$\log_e a - \frac{b}{a}\cos C - \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\cos 2C - \frac{1}{3}\frac{b^3}{a^3}\cos 3C - \ldots\ldots \infty$$

$$= \log_e a - \left[\frac{b}{a}\cos C + \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\cos 2C + \frac{1}{3}\frac{b^3}{a^3}\cos 3C + \ldots\ldots \infty\right]$$

$$= \log_e a - \left[-\frac{1}{2}\log_e\left(1 + \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{b}{a}\cos C\right)\right].$$

$\because \frac{b}{a} < 1$ [8-8.3-ன் துணை முடிவின்படி]

$$= \log_e a + \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}{a^2}\right)$$

$$= \log_e a + \frac{1}{2}\log_e\frac{c^2}{a^2}$$

$$= \log_e a + \log_e\frac{c}{a}$$

$$= \log_e c$$

**8-8.5.** $|x| < 1$ **எனில்,** $x\sin\theta + \frac{x^3}{3}\sin 3\theta + \frac{x^5}{5}\sin 5\theta + \ldots\infty$

**என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.**

(செ. ப. 1947 செ.)
(செ. ப. 1954 செ.)

$$C = x\cos\theta + \frac{x^3}{3}\cos 3\theta + \frac{x^5}{5}\cos 5\theta + \ldots\ldots \infty,$$

$$S = x\sin\theta + \frac{x^3}{3}\sin 3\theta + \frac{x^5}{5}\sin 5\theta + \ldots\ldots \infty$$

என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது,

$$C + iS = x(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{x^3}{3}(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) + \frac{x^5}{5}(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) + \ldots\ldots \infty$$

$$= x\,e^{i\theta} + \frac{x^3}{3}e^{i3\theta} + \frac{x^5}{5}e^{i5\theta} + \ldots\ldots \infty$$

$$= \left(xe^{i\theta}\right) + \frac{\left(xe^{i\theta}\right)^3}{3} + \frac{\left(xe^{i\theta}\right)^5}{5} + \ldots\ldots \infty$$

ஆனல், $\left| xe^{i\theta} \right| = \left| x \right| < 1$ (கொள்கை)

$$\therefore \quad C + iS = \frac{1}{2} \log \frac{1 + xe^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}}$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{\left(1 + xe^{i\theta}\right)\left(1 - xe^{-i\theta}\right)}{\left(1 - xe^{i\theta}\right)\left(1 - xe^{-i\theta}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{1 + x\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) - x^2}{1 - x\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) + x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{1 - x^2 + 2ix \sin\theta}{1 + x^2 - 2x\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{2} \log \left[ \frac{1 - x^2}{1 + x^2 - 2x\cos\theta} + i \frac{2x\sin\theta}{1 + x^2 - 2x\cos\theta} \right]$$

$\dfrac{1 - x^2}{1 - 2x\cos\theta + x^2} = u, \quad \dfrac{2x\sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2} = v$ எனில்,

$$C + iS = \frac{1}{2} [\log (u + iv)]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \log_e (u^2 + v^2) + i \tan^{-1} \frac{v}{u} \right]$$

[சூத்திரம் (210)-ன்படி]

$$= \frac{1}{4} \log_e (u^2 + v^2) + i \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{v}{u}$$

$$= \frac{1}{4} \log_e (u^2 + v^2) + i \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2x\sin\theta}{1 - x^2}$$

கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த,

$$S = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2x\sin\theta}{1 - x^2}$$

குறிப்பு :

$$u^2 + v^2 = \frac{(1 - x^2)^2 + 4x^2 \sin^2\theta}{(1 - 2x\cos\theta + x^2)^2}$$

$$= \frac{(1 - x^2)^2 + 4x^2 (1 - \cos^2\theta)}{(1 - 2x\cos\theta + x^2)^2}$$

$$= \frac{(1 - x^2)^2 + 4x^2 - 4x^2 \cos^2 \theta}{(1 - 2x \cos \theta + x^2)^2}$$

$$= \frac{(1 + x^2)^2 - (2x \cos \theta)^2}{(1 - 2x \cos \theta + x^2)^2}$$

$$= \frac{(1 + x^2 + 2x \cos \theta)\ (1 + x^2 - 2x \cos \theta)}{(1 - 2x \cos \theta + x^2)^2}$$

$$= \frac{1 + x^2 + 2x \cos \theta}{1 + x^2 - 2x \cos \theta}$$

$$\therefore\ C = \frac{1}{4} \log_e \left[ \frac{1 + x^2 + 2x \cos \theta}{1 + x^2 - 2x \cos \theta} \right]$$

**8.9. இிரிகரியின் தொடரைச் சார்ந்த தொடர்கள்**

**8-9.1.** $c \cos \alpha - \frac{c^3}{3} \cos (\alpha + 2\beta) + \frac{c^5}{5} \cos (\alpha + 4\beta)$

$- \ldots\ldots\ldots \infty$ **என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.**

$$\gamma = c \cos \alpha - \frac{c^3}{3} \cos (\alpha + 2\beta) + \frac{c^5}{5} \cos (\alpha + 4\beta) - \ldots\ldots\ldots \infty,$$

$$\sigma = c \sin \alpha - \frac{c^3}{3} \sin (\alpha + 2\beta) + \frac{c^5}{5} \sin (\alpha + 4\beta) - \ldots\ldots\ldots \infty$$

என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $\gamma + i\sigma = c\ [\cos \alpha + i \sin \alpha] - \frac{c^3}{3} [\cos(\alpha + 2\beta) + i \sin (\alpha + 2\beta)] + \frac{c^5}{5} [\cos (\alpha + 4\beta) + i \sin (\alpha + 4\beta)] - \ldots\ldots\ldots \infty$

$$= c\, e^{i\alpha} - \frac{c^3}{3} e^{i(\alpha + 2\beta)} + \frac{c^5}{5} e^{i(\alpha + 4\beta)} - \ldots\ldots\ldots \infty$$

$$= e^{i(\alpha - \beta)} \left[ c\, e^{i\beta} - \frac{c^3}{3} e^{i3\beta} + \frac{c^5}{5} e^{i5\beta} - \ldots\ldots\ldots \infty \right]$$

$$= e^{i(\alpha - \beta)} \left[ c\, e^{i\beta} - \frac{(c\, e^{i\beta})^3}{3} + \frac{(c\, e^{i\beta})^5}{5} - \ldots\ldots\ldots \infty \right]$$

$$= e^{i(\alpha - \beta)} \tan^{-1} (c\, e^{i\beta})$$ [சூத்திரம் (230)-ன் படி.]

$$= [\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)]\ \tan^{-1}(c\cos\beta+ic\sin\beta)$$

$\tan^{-1}(c\cos\beta+ic\sin\beta)=p+iq$ எனில்,

$$\tan(p+iq)=c\cos\beta+ic\sin\beta$$

$$\therefore\quad \tan(p-iq)=c\cos\beta-ic\sin\beta$$

இப்பொழுது, $\tan 2p=\tan[(p+iq)+(p-iq)]$

$$=\frac{\tan(p+iq)+\tan(p-iq)}{1-\tan(p+iq)\tan(p-iq)}$$

$$=\frac{2c\cos\beta}{1-c^2}$$

$$\therefore\quad p=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2c\cos\beta}{1-c^2}$$

மேலும், $\tan(i2q)=\tan[(p+iq)-(p-iq)]$

அ-து. $$i\tanh 2q=\frac{\tan(p+iq)-\tan(p-iq)}{1+\tan(p+iq)\tan(p-iq)}$$

$$=\frac{2ic\sin\beta}{1+c^2}$$

$$\therefore\quad q=\frac{1}{2}\tanh^{-1}\frac{2c\sin\beta}{1+c^2}$$

இப்பொழுது, $\gamma+i\sigma=[\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)]\ [p+iq]$ மெய்ப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த.

$$\gamma=p\cos(\alpha-\beta)-q\sin(\alpha-\beta)$$

$$=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta).\ \tan^{-1}\frac{2c\cos\beta}{1-c^2}-\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)\tanh^{-1}\frac{2c\sin\beta}{1+c^2}$$

$$=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta).\ \tan^{-1}\frac{2c\cos\beta}{1-c^2}-\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta).\ \frac{1}{2}\log_e\frac{1+\dfrac{2c\sin\beta}{1+c^2}}{1-\dfrac{2c\sin\beta}{1+c^2}}$$

[சூத்திரம் (203)-ன் படி]

$$= \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta).\ \tan^{-1} \frac{2c\cos\beta}{1-c^2}$$

$$- \frac{1}{4} \sin (\alpha - \beta).\ \log_e \frac{1+c^2+2c\sin\beta}{1+c^2-2c\sin\beta}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (250)$$

**துணை முடிவு :**

$$\sigma = p \sin (\alpha - \beta) + q \cos (\alpha - \beta)$$

$$= \frac{1}{2} \sin (\alpha - \beta).\ \tan^{-1} \frac{2c\cos\beta}{1-c^2}$$

$$+ \frac{1}{4} \cos (\alpha - \beta).\ \log \frac{1+c^2+2c\sin\beta}{1+c^2-2c\sin\beta}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (251)$$

**8-9.2.** $c \equiv \cos^2\theta - \frac{1}{3}\cos^3\theta\ .\ \cos 3\theta + \frac{1}{5}\cos^5\theta\ .\ \cos 5\theta -$ $\ldots\ldots\ldots \infty$

எனில், $\tan 2c = 2\cot^2\theta$ என நிறுவுக.

$S \equiv \cos\theta.\ \sin\theta - \frac{1}{3}\cos^3\theta.\ \sin 3\theta + \frac{1}{5}\cos^5\theta\ \sin 5\theta - \ldots$ $\ldots\ldots\ldots, \infty$ என இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $C + iS = \cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$- \frac{\cos^3\theta}{3}(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) +$$

$$\frac{\cos^5\theta}{5}(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) - \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$$

$$= \cos\theta\ e^{i\theta} - \frac{\cos^3\theta}{3}\ e^{i3\theta} + \frac{\cos^5\theta}{5}\ e^{i5\theta} - \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$$

$$= (e^{i\theta}\cos\theta) - \frac{(e^{i\theta}\cos\theta)^3}{3} + \frac{(e^{i\theta}\cos\theta)^5}{5} - \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$$

$= \tan^{-1}(e^{i\theta}\cos\theta)$ [சூத்திரம் (230)-ன் படி]

$$= \tan^{-1}(\cos\theta + i\sin\theta)\cos\theta$$

$$= \tan^{-1}(\cos^2\theta + i\sin\theta.\ \cos\theta)$$

$$\therefore \quad \tan(C + iS) = \cos^2\theta + i\sin\theta.\ \cos\theta$$

$$\therefore \quad \tan(C - iS) = \cos^2\theta - i\sin\theta.\ \cos\theta$$

இப்பொழுது,

$$\tan 2C = \tan [(C + i S) + (C - i S)]$$

$$= \frac{\tan (C + i S) + \tan (C - i S)}{1 - \tan (C + i S) . \tan (C - i S)}$$

$$= \frac{2 \cos^2 \theta}{1 - (\cos^4 \theta + \sin^2 \theta . \cos^2 \theta)}$$

$$= \frac{2 \cos^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}$$

$$= \frac{2 \cos^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{2 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$= 2 \cot^2 \theta$$

## பயிற்சி 8 (உஊ)

**பின்வரும் தொடர்களின் கூட்டுத் தொகைகளைக் காண்க.**

1. $\sin \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{3} \sin 3\theta - \ldots\ldots \infty$

(செ. ப. 1946 மா.)

2. $\cos \theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{3} \cos 3\theta - \ldots\ldots \infty$

3. $c \sin \alpha - \frac{c^2}{2} \sin 2\alpha + \frac{c^3}{3} \sin 3\alpha - \ldots\ldots \infty$

(ம. ப. 1971 ஏ.)

4. $x \cos \alpha - \frac{x^2}{2} \cos 2\alpha + \frac{x^3}{3} \cos 3\alpha - \ldots\ldots \infty$

5. $\sin \theta . \frac{\sin \theta}{1} - \sin 2\theta . \frac{\sin^2 \theta}{2} + \sin 3\theta . \frac{\sin^3 \theta}{3} - \ldots\ldots \infty$

6. $\cosh \theta - \frac{1}{2} \cosh 2\theta + \frac{1}{3} \cosh 3\theta - \ldots\ldots \infty$

(செ. ப. 1952 செ.)

7. $\sinh \alpha - \frac{1}{2} \sinh 2\alpha + \frac{1}{3} \sinh 3\alpha - \ldots\ldots \infty$

8. $\frac{\sin\theta}{1} + \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 3\theta}{3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \infty$

9. $\cos\alpha + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{3}\cos 3\alpha + \ldots\ldots\ldots\ldots\ \infty$

10. $\sin\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{3} + \ldots\ldots\ \infty$

11. $\cos\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{3} + \ldots\ldots\ \infty$

12. $r\cos\theta + \frac{r^2}{2}\cos 2\theta + \frac{r^3}{3}\cos 3\theta + \ldots\ldots\infty,\ |r| < 1$

(செ. ப. 1963 செ.)

13. $\frac{\cos\theta.\ \sin\theta}{1} + \frac{\cos^2\theta.\ \sin 2\theta}{2} + \frac{\cos^3\theta.\ \sin 3\theta}{3} + \ldots\infty,$

$0 < \theta < \pi.$

14. $\sin\alpha + c\sin(\alpha+\beta) + \frac{c^2}{2}\sin(\alpha+2\beta) + \ldots\ldots\infty,$

$|c| < 1.$

15. $\cos\alpha + c\cos(\alpha+\beta) + \frac{c^2}{2}\cos(\alpha+2\beta) + \ldots\ldots\infty,$

$|c| < 1$

16. $\cos\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\cos\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{5}\cos\frac{3\pi}{3} + \ldots\ldots\ \infty$

17. $\sin\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\sin\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{5}\sin\frac{3\pi}{3} + \ldots\ldots\ \infty$

18. $\cos 2\theta + \frac{1}{3}\cos 6\theta + \frac{1}{5}\cos 10\theta + \ldots\ldots\ \infty$

19. $\sin^2\alpha + \frac{\sin^3\alpha}{3}\sin 3\alpha + \frac{\sin^5\alpha}{5}\sin 5\alpha + \ldots\infty$

20. ABC என்பது ஒரு முக்கோணம்;

$(\cos 2A - \cos 2B) + \frac{1}{2}(\cos 4A - \cos 4B) +$

$\frac{1}{3}(\cos 6A - \cos 6B) + \ldots\ldots\ \infty = \log_e\left(\frac{b}{a}\right)$

என நிறுவுக.

21. ABC என்பது ஒரு முக்கோணம்;

$$\frac{c \sin B}{a+b} + \frac{1}{2}\frac{c^2 \sin 2B}{(a+b)^2} + \frac{1}{3}\frac{c^3 \sin 3B}{(a+b)^3} + \ldots\ldots \infty = \frac{1}{2} c$$ என நிறுவுக.

22. $S \equiv \cos\theta \sin\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta \sin 3\theta + \frac{1}{5}\cos^5\theta \sin 5\theta + \ldots\ldots \infty$ எனில், $\tan 2S = 2\cot\theta$ என நிறுவுக.

23. $\theta, \phi$ என்பவை குறுங்கோணங்கள் எனில், $\theta >$ அல்லது $< \phi$ என்பதைப் பொறுத்து,

$\sin\theta.\cos\phi + \frac{1}{3}\sin 3\theta.\cos 3\phi + \frac{1}{5}\sin 5\theta.\cos 5\phi + \ldots\ldots \infty$ என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகை $\frac{\pi}{4}$ அல்லது பூச்சியம் ஆகும் என நிறுவுக.

(ம. ப. 1971 ஏ.)

பின் வரும் தொடர்களின் கூட்டுத் தொகைகளைக் காண்க.

24. $\cos\theta - \frac{1}{3}\cos 3\theta + \frac{1}{5}\cos 5\theta - \ldots\ldots\ldots \infty$

25. $\sin\theta - \frac{1}{3}\sin 3\theta + \frac{1}{5}\sin 5\theta - \ldots\ldots\ldots \infty$

26. $c\cos\alpha - \frac{c^3}{3}\cos 3\alpha + \frac{c^5}{5}\cos 5\alpha - \ldots\ldots\ldots \infty$

27. $c\sin\alpha - \frac{c^3}{3}\sin 3\alpha + \frac{c^5}{5}\sin 5\alpha - \ldots\ldots\ldots \infty$

28. $\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{1}{3.2^3}\cos 3\theta + \frac{1}{5.2^5}\cos 5\theta - \ldots\ldots \infty$

(செ. ப. 1968 ஏ.; 1969 செ.)

## விடைகள்

1. $\frac{\theta}{2}$

2. $\log_e\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)$

3. $\tan^{-1}\frac{c\sin\alpha}{1+c\cos\alpha}$

4. $\frac{1}{2}\log_e\,[1 + 2\,x\cos\alpha + x^2]$

5. $\tan^{-1}\dfrac{\sin^2\theta}{1 + \sin\theta.\cos\theta}$

6. $\frac{1}{2}\log_e\,2\,(1 + \cosh\theta)$

7. $\frac{\alpha}{2}$

8. $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$

9. $-\log_e\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

10. $\frac{\pi}{3}$

11. 0

12. $-\frac{1}{2}\log_e\,(1 - 2\,r\cos\theta + r^2)$

13. $\frac{\pi}{2} - \theta$

14. $-\frac{1}{2}\sin\alpha.\log_e\,(1 - 2\,c\cos\beta + c^2)$

$-\cos\alpha.\tan^{-1}\left(\dfrac{c\sin\beta}{1 - c\cos\beta}\right) + \sin\alpha$

15. $-\frac{1}{2}\cos\alpha.\log_e\,(1 - 2\,c\cos\beta + c^2)$

$+\sin\alpha.\tan^{-1}\left(\dfrac{c\sin\beta}{1 - c\cos\beta}\right) + \cos\alpha$

16. $\frac{1}{8}\,[2\sqrt{3}\,\log_e\,(2 + \sqrt{3}) - \pi]$

17. $\frac{1}{8}\,[\sqrt{3}\,\pi + 2\log_e(2 + \sqrt{3})]$

18. $\frac{1}{2}\log_e\,(\cot\theta)$

19. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\,(2\tan^2\alpha)$

24. $\pm \frac{\pi}{4}$

25. $\frac{1}{4} \log \frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta}$

26. $\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2c\cos\alpha}{1 - c^2}$

27. $\frac{1}{4} \log_e \left[\frac{1 + 2c\sin\alpha + c^2}{1 - 2c\sin\alpha + c^2}\right]$

28. $\frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\cos\theta\right)$

## 8.10. வேறுபாட்டு முறைக்கு ஒத்துவரும் தொடர்கள்

வேறுபாட்டு முறையில் கூட்டுத் தொகையைக் காண்பதற்கு, கொடுக்கப்படும் தொடரின் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் இரண்டு கோவைகளின் (Expressions) வேறுபாடாகப் (Difference) பிரிக்க வேண்டும். ஒவ்வொரு வேறுபாட்டிலுமுள்ள ஒரு கோவையானது அடுத்து வரும் வேறுபாட்டில் (Succeeding Difference), குறி (Sign) மாறி வர வேண்டும். இதனுல், எல்லா உறுப்புகளையும் கூட்டும் போது, முதல் வேறுபாட்டில் உள்ள ஒரு கோவையையும் இறுதி வேறுபாட்டில் உள்ள ஒரு கோவையையும் தவிர மற்றவைகள் நீங்கி விடும். இம் முறையில் கூட்டுத் தொகையைக் காண்பதற்கு மிகுந்த திறமை தேவைப்படுகிறது. ஆனுல், $n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை தெரிந்தால், அதில் $n = 1$ என்று போட்டால், முதல் உறுப்பை எப்படிப் பிரித்து எழுத வேண்டும் என்று தெரிந்து விடும். எனவே, விடை தெரிந்தால் இம் முறையில் கூட்டுத் தொகையைக் காண்பது மிகவும் எளிது. இந்தப் பிரிவில், $r$ ஆம் உறுப்பை $T_r$-ம், $n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையை $S_n$-ம், முடிவிலி (Infinity) வரை கூட்டுத் தொகையை $S_\infty$-ம் குறிக்கும்.

**8-10.1.** $\frac{1}{\cos\alpha + \cos 3\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha + \cos 5\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha + \cos 7\alpha} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

(செ. ப. 1959 மா.; 1964 செ.)

$$T_r = \frac{1}{\cos\alpha + \cos(2r+1)\alpha}$$

$$= \frac{1}{2\cos r\alpha \,.\, \cos(r+1)\alpha}$$

$$= \frac{\sin\alpha}{2\sin\alpha \,.\, \cos r\alpha \,.\, \cos(r+1)\alpha}$$

$$= \frac{\sin[(r+1)\alpha - r\alpha]}{2\sin\alpha \,.\, \cos r\alpha \,.\, \cos(r+1)\alpha}$$

$$= \frac{1}{2\sin\alpha}\left[\frac{\sin(r+1)\alpha\cos r\alpha - \cos(r+1)\alpha \,.\, \sin r\alpha}{\cos r\alpha \,.\, \cos(r+1)\alpha}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sin\alpha}\left[\tan(r+1)\alpha - \tan r\alpha\right]$$

$$\therefore \quad T_1 = \frac{1}{2\sin\alpha}\left[\tan 2\alpha - \tan\alpha\right]$$

$$T_2 = \frac{1}{2\sin\alpha}\left[\tan 3\alpha - \tan 2\alpha\right]$$

$$T_3 = \frac{1}{2\sin\alpha}\left[\tan 4\alpha - \tan 3\alpha\right]$$

..........................................

..........................................

..........................................

$$T_n = \frac{1}{2\sin\alpha}\left[\tan(n+1)\alpha - \tan n\alpha\right]$$

கூட்ட, $$S_n = \frac{1}{2\sin\alpha}\left[\tan(n+1)\alpha - \tan\alpha\right]$$

**8-10.2.** $\operatorname{cosec}\theta \,.\, \operatorname{cosec}(\theta+\phi) + \operatorname{cosec}(\theta+\phi) \,.\, \operatorname{cosec}(\theta+2\phi) + \operatorname{cosec}(\theta+2\phi) \,.\, \operatorname{cosec}(\theta+3\phi) + \dots\dots\dots$ $n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

$$T_r = \operatorname{cosec}(\theta + \overline{r-1}\,\phi) \,.\, \operatorname{cosec}(\theta + r\phi)$$

$$= \frac{1}{\sin(\theta + \overline{r-1}\,\phi)\sin(\theta + r\phi)}$$

$$= \frac{\sin\phi}{\sin\phi \,.\, \sin(\theta + \overline{r-1}\,\phi)\sin(\theta + r\phi)}$$

$$= \frac{\sin[(\theta + r\phi) - (\theta + \overline{r-1}\,\phi)]}{\sin\phi.\ \sin(\theta + \overline{r-1}\,\phi).\ \sin(\theta + r\phi)}$$

$$= \frac{\sin(\theta + r\phi).\cos(\theta + \overline{r-1}\,\phi) - \cos(\theta + r\phi).(\theta + \overline{r-1}\,\phi)}{\sin\phi\ .\ \sin(\theta + \overline{r-1}\,\phi)\ .\ \sin(\theta + r\phi)}$$

$$= \frac{1}{\sin\phi}\left[\cot(\theta + \overline{r-1}\,\phi) - \cot(\theta + r\phi)\right]$$

$$\therefore\quad T_1 = \frac{1}{\sin\phi}\left[\cot\theta - \cot(\theta + \phi)\right]$$

$$T_2 = \frac{1}{\sin\phi}\left[\cot(\theta + \phi) - \cot(\theta + 2\phi)\right]$$

$$T_3 = \frac{1}{\sin\phi}\left[\cot(\theta + 2\phi) - \cot(\theta + 3\phi)\right]$$

..............................................................................

..............................................................................

$$T_n = \frac{1}{\sin\phi}\left[\cot(\theta + \overline{n-1}\,\phi) - \cot(\theta + n\phi)\right]$$

கூட்ட, $S_n = \dfrac{1}{\sin\phi}\left[\cot\theta - \cot(\theta + n\phi)\right]$

**8-10.3.** $\tan\theta\ .\ \sec 2\theta + \tan 2\theta\ .\ \sec 2^2\theta + \tan 2^2\theta\ .\ \sec 2^3\theta + \ldots\ldots\ldots$ $n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

(செ. ப. 1962 செ.)

(செ. ப. 1970 ஏ.)

$$T_r = \tan 2^{r-1}\theta.\ \sec 2^r\theta$$

$$= \frac{\sin 2^{r-1}\theta}{\cos 2^{r-1}\theta}\cdot\frac{1}{\cos 2^r\theta}$$

$$= \frac{\sin[2^r - 2^{r-1}]\theta}{\cos 2^{r-1}\theta.\ \cos 2^r\theta}$$

$$= \frac{\sin(2^r\theta - 2^{r-1}\theta)}{\cos 2^{r-1}\theta.\ \cos 2^r\theta}$$

$$= \frac{\sin 2^r\theta.\ \cos 2^{r-1}\theta - \cos 2^r\theta.\ \sin 2^{r-1}\theta}{\cos 2^{r-1}\theta.\ \cos 2^r\theta}$$

$$= \tan 2^r\theta - \tan 2^{r-1}\theta$$

$\therefore\quad T_1 = \tan 2\theta - \tan\theta$

$T_2 = \tan 2^2\theta - \tan 2\theta$

$T_3 = \tan 2^3\theta - \tan 2^2\theta$

..................................

..................................

$T_n = \tan 2^n\theta - \tan 2^{n-1}\theta$

கூட்ட, $S_n = \tan 2^n\theta - \tan\theta$

**8-10.4.** $\tan\theta + \frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{\theta}{2^2} + \frac{1}{2^3}\tan\frac{\theta}{2^3} + \dots\infty$

**என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.**

(செ. ப. 1962 ஏ.)

$$\tan\theta - \cot\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin\theta.\cos\theta}$$

$$= \frac{-\cos 2\theta}{\sin\theta.\cos\theta}$$

$$= \frac{-2\cos 2\theta}{2\sin\theta.\cos\theta}$$

$$= -\frac{2\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

$$= -2\cot 2\theta$$

$$\therefore\ \tan\theta = \cot\theta - 2\cot 2\theta$$

இதேபோல், $\tan\frac{\theta}{2} = \cot\frac{\theta}{2} - 2\cot\theta$

$$\tan\frac{\theta}{2^2} = \cot\frac{\theta}{2^2} - 2\cot\frac{\theta}{2}$$

$$\tan\frac{\theta}{2^3} = \cot\frac{\theta}{2^3} - 2\cot\frac{\theta}{2^2}$$

..................................

..................................

$$\tan\frac{\theta}{2^{n-1}} = \cot\frac{\theta}{2^{n-1}} - 2\cot\frac{\theta}{2^{n-2}}$$

இப்பொழுது, $T_1 = \tan\theta = \cot\theta - 2\cot 2\theta$

$$T_2 = \frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2} - \cot\theta$$

$$T_3 = \frac{1}{2^2}\cdot\tan\frac{\theta}{2^2} = \frac{1}{2^2}\cot\frac{\theta}{2^2} - \frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}$$

$$T_4 = \frac{1}{2^3}\tan\frac{\theta}{2^3} = \frac{1}{2^3}\cot\frac{\theta}{2^3} - \frac{1}{2^2}\cot\frac{\theta}{2^2}$$

..............................................................

..............................................................

$$T_n = \frac{1}{2^{n-1}}\tan\frac{\theta}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{\theta}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-2}}\cot\frac{\theta}{2^{n-2}}$$

கூட்ட $S_n = \frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{\theta}{2^{n-1}} - 2\cot 2\theta$

$$\therefore S_\infty = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\ \frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{\theta}{2^{n-1}} - 2\cot 2\theta$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\ \frac{1}{\theta}\cdot\frac{\theta}{2^{n-1}}\cot\frac{\theta}{2^{n-1}} - 2\cot 2\theta$$

$$= \frac{1}{\theta}\cdot\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\ \frac{\frac{\theta}{2^{n-1}}}{\tan\frac{\theta}{2^{n-1}}} - 2\cot 2\theta$$

$$= \frac{1}{\theta}\cdot 1 - 2\cot 2\theta$$

$$= \frac{1}{\theta} - 2\cot 2\theta$$

**8-10.5.** $\sin^3\frac{\theta}{3} + 3\sin^3\frac{\theta}{3^2} + 3^2\sin^3\frac{\theta}{3^3} + \ldots$ $n$ **உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.**

(செ. ப. 1953 மா.)
(செ. ப. 1955)

$$T_r = 3^{r-1}\sin^3\frac{\theta}{3^r}$$

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ என்ற சர்வ சமத்திலிருந்து,

$$\sin^3\alpha = \frac{3}{4}\sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 3\alpha$$

$$\therefore\quad \sin^3\frac{\theta}{3} = \frac{3}{4}\sin\frac{\theta}{3} - \frac{1}{4}\sin\theta$$

$$\sin^3\frac{\theta}{3^2} = \frac{3}{4}\sin\frac{\theta}{3^2} - \frac{1}{4}\sin\frac{\theta}{3}$$

$$\sin^3\frac{\theta}{3^3} = \frac{3}{4}\sin\frac{\theta}{3^3} - \frac{1}{4}\sin\frac{\theta}{3^2}$$

..............................................

..............................................

$$\sin^3\frac{\theta}{3^n} = \frac{3}{4}\sin\frac{\theta}{3^n} - \frac{1}{4}\sin\frac{\theta}{3^{n-1}}$$

இப்பொழுது,

$$T_1 = \sin^3\frac{\theta}{3} = \frac{3}{4}\sin\frac{\theta}{3} - \frac{1}{4}\sin\theta$$

$$T_2 = 3\sin^3\frac{\theta}{3^2} = \frac{3^2}{4}\sin\frac{\theta}{3^2} - \frac{3}{4}\sin\frac{\theta}{3}$$

$$T_3 = 3^2\sin^3\frac{\theta}{3^3} = \frac{3^3}{4}\sin\frac{\theta}{3^3} - \frac{3^2}{4}\sin\frac{\theta}{3^2}$$

..............................................

..............................................

$$T_n = 3^{n-1}\sin^3\frac{\theta}{3^n} = \frac{3^n}{4}\sin\frac{\theta}{3^n} - \frac{3^{n-1}}{4}\sin\frac{\theta}{3^{n-1}}$$

கூட்ட,

$$S_n = \frac{3^n}{4}\sin\frac{\theta}{3^n} - \frac{1}{4}\sin\theta$$

**8-10.6.** $\sin\theta.\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 + 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{4}\right)^2 + 4\sin\frac{\theta}{4}.\left(\sin\frac{\theta}{8}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots\ n$ **உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.** (செ. ப. 1950 மா.)

$$\sin\theta.\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 = \sin\theta.\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$= \sin\theta.\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sin\theta - \frac{1}{2} \sin\theta . \cos\theta$$

$$= \frac{1}{2} \sin\theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta$$

இதேபோல்,

$$\sin\frac{\theta}{2} . \left(\sin\frac{\theta}{4}\right)^2 = \sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2^2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sin\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin\theta$$

$$\sin\frac{\theta}{4}\left(\sin\frac{\theta}{8}\right)^2 = \sin\frac{\theta}{2^2}\left(\sin\frac{\theta}{2^3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sin\frac{\theta}{2^2} - \frac{1}{4} \sin\frac{\theta}{2}$$

..................................................................................................

..................................................................................................

$$\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}\left(\sin\frac{\theta}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{2} \sin\frac{\theta}{2^{n-1}} - \frac{1}{4} \sin\frac{\theta}{2^{n-2}}$$

இப்பொழுது,

$$T_1 = \sin\theta\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\sin\theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta$$

$$T_2 = 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{4}\right)^2 = \sin\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin\theta$$

$$T_3 = 4\sin\frac{\theta}{4}\left(\sin\frac{\theta}{8}\right)^3 = 2\sin\frac{\theta}{2^2} - \sin\frac{\theta}{2}$$

..................................................................................

..................................................................................

$$T_n = 2^{n-1} \sin\frac{\theta}{2^{n-1}}\left(\sin\frac{\theta}{2^n}\right)^2$$

$$= 2^{n-2} \sin\frac{\theta}{2^{n-1}} - 2^{n-3} \sin\frac{\theta}{2^{n-2}}$$

கூட்ட,

$$S_n = 2^{n-2} \sin\frac{\theta}{2^{n-1}} - \frac{1}{4} \sin 2\theta$$

**8-10.7.** $\tan^{-1}\frac{1}{1+1+1^2}+\tan^{-1}\frac{1}{1+2+2^2}+\tan^{-1}\frac{1}{1+3+3^2}+\ldots\ldots$ $n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

(செ. ப. 1951 செ.)
(செ. ப. 1960 மா.)

$$T_r=\tan^{-1}\frac{1}{1+r+r^2}$$

$$=\tan^{-1}\frac{1}{1+r(r+1)}$$

$$=\tan^{-1}\frac{(r+1)-r}{1+(r+1)r}$$

$$=\tan^{-1}(r+1)-\tan^{-1}r$$ [சூத்திரம் (32)-ன் படி]

$\therefore\ T_1=\tan^{-1}2-\tan^{-1}1$

$T_2=\tan^{-1}3-\tan^{-1}2$

$T_3=\tan^{-1}4-\tan^{-1}3$

..........................................

..........................................

$T_n=\tan^{-1}(n+1)-\tan^{-1}n$

கூட்ட, $S_n=\tan^{-1}(n+1)-\tan^{-1}1$

$$=\tan^{-1}(n+1)-\frac{\pi}{4}$$

குறிப்பு :

$$S_\infty=\tan^{-1}\infty-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

**8-10.8.** $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{2}{9}+\tan^{-1}\frac{4}{33}+\tan^{-1}\frac{8}{129}+\ldots\ldots$

$n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

(செ. ப. 1962 ஏ.)
(செ. ப. 1963 செ.)

$$T_r = \tan^{-1} \frac{2^{r-1}}{1 + 2^{2r-1}}$$

$$= \tan^{-1} \frac{2^{r-1}}{1 + 2^r . 2^{r-1}}$$

$$= \tan^{-1} \frac{2^r - 2^{r-1}}{1 + 2^r . 2^{r-1}}$$

$$= \tan^{-1} 2^r - \tan^{-1} 2^{r-1}$$ [சூத்திரம் (32)-ன் படி]

$$\therefore \quad T_1 = \tan^{-1} 2 - \tan^{-1} 1$$

$$T_2 = \tan^{-1} 2^2 - \tan^{-1} 2$$

$$T_3 = \tan^{-1} 2^3 - \tan^{-1} 2^2$$

....................................

....................................

$$T_n = \tan^{-1} 2^n - \tan^{-1} 2^{n-1}$$

கூட்ட, $S_n = \tan^{-1} 2^n - \tan^{-1} 1$

$$= \tan^{-1} 2^n - \frac{\pi}{4}$$

குறிப்பு :

$$S_\infty = \tan^{-1} \infty - \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

**8·10.9.** $\cot^{-1} 2 + \cot^{-1} 8 + \cot^{-1} 18 + \cot^{-1} 32 + \ldots\ldots\ldots$ என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

$$T_r = \cot^{-1} 2r^2$$

$$= \tan^{-1} \frac{1}{2r^2}$$ [சூத்திரம் (17)-ன் படி]

$$= \tan^{-1} \frac{2}{4r^2}$$

$$= \tan^{-1} \frac{2}{1 + 4r^2 - 1}$$

$$= \tan^{-1} \frac{2}{1 + (2r+1)(2r-1)}$$

$$= \tan^{-1} \frac{(2r+1) - (2r-1)}{1 + (2r+1)(2r-1)}$$

$$= \tan^{-1}(2r+1) - \tan^{-1}(2r-1)$$ [சூத்திரம் (32)-ன் படி]

$\therefore \quad T_1 = \tan^{-1} 3 - \tan^{-1} 1$

$T_2 = \tan^{-1} 5 - \tan^{-1} 3$

$T_3 = \tan^{-1} 7 - \tan^{-1} 5$

..............................

..............................

$T_n = \tan^{-1}(2n+1) - \tan^{-1}(2n-1)$

கூட்ட, $S_n = \tan^{-1}(2n+1) - \tan^{-1} 1$

$$= \tan^{-1} \frac{2n+1-1}{1+(2n+1).1}$$

[சூத்திரம் (32)-ன் படி]

$$= \tan^{-1} \frac{2n}{2n+2}$$

$$= \tan^{-1} \frac{n}{n+1}$$

$$\therefore \quad S_\infty = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \tan^{-1} \frac{n}{n+1}$$

$$= \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \tan^{-1} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$= \tan^{-1} 1$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

**8-10.10.** $\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin^{-1} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}} + \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$ $+ \ldots\ldots\ldots \infty$, **என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.**

$$T^r = \sin^{-1} \frac{\sqrt{r} - \sqrt{r-1}}{\sqrt{r(r+1)}}$$

$$= \sin^{-1} \left[\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r(r+1)}} - \frac{\sqrt{r-1}}{\sqrt{r(r+1)}}\right]$$

$$= \sin^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{r}} \sqrt{\frac{r}{r+1}} - \frac{1}{\sqrt{r+1}} \sqrt{\frac{r-1}{r}}\right]$$

$$= \sin^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{r}} \sqrt{1 - \frac{1}{(r+1)}} - \frac{1}{\sqrt{r+1}} \sqrt{1 - \frac{1}{r}}\right]$$

$x = \dfrac{1}{\sqrt{r}}$ , $y = \dfrac{1}{\sqrt{r+1}}$ எனில்,

$$T_r = \sin^{-1} \left[x \sqrt{1 - y^2} - y \sqrt{1 - x^2}\right]$$

$$= \sin^{-1} x - \sin^{-1} y \qquad \text{[சூத்திரம் (25)-ன் படி]}$$

$$= \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{r}} - \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{r+1}}$$

$$\therefore \quad T_1 = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1}} - \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$T_2 = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$T_3 = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} - \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{4}}$$

..............................................

..............................................

$$T_n = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

கூட்ட, $\quad S_n = \sin^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{1}} - \sin^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

$$= \sin^{-1} 1 - \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\therefore \quad S_{\infty} = \sin^{-1} 1 - \sin^{-1} 0$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

## பயிற்சி 8 (எ)

**பின்வரும் தொடர்களின் கூட்டுத் தொகைகளைக் காண்க:**

1. $\dfrac{1}{\cos\theta - \cos 3\theta} + \dfrac{1}{\cos\theta - \cos 5\theta} + \dfrac{1}{\cos\theta - \cos 7\theta} + \ldots\ldots$ *n* உறுப்புகள்.

2. $\operatorname{cosec}\theta + \operatorname{cosec} 2\theta + \operatorname{cosec} 2^2\theta + \ldots\ldots$ *n* உறுப்புகள்.

3. $\operatorname{cosec}\theta.\ \operatorname{cosec} 2\theta + \operatorname{cosec} 2\theta.\ \operatorname{cosec} 3\theta + \operatorname{cosec} 3\theta.\ \operatorname{cosec} 4\theta + \ldots\ldots$ *n* உறுப்புகள்.
(செ. ப. 1961 ஏ.)

4. $\operatorname{cosec}\theta.\ \operatorname{cosec} 3\theta + \operatorname{cosec} 3\theta.\ \operatorname{cosec} 5\theta + \operatorname{cosec} 5\theta.\ \operatorname{cosec} 7\theta + \ldots\ldots$ *n* உறுப்புகள்.

5. $\sec x.\ \sec 2x + \sec 2x.\ \sec 3x + \sec 3x.\ \sec 4x + \ldots\ldots$ *n* உறுப்புகள்.
(செ. ப. 1965 ஏ.)

6. $\sec 2\alpha.\ \sec 4\alpha + \sec 4\alpha.\ \sec 6\alpha + \sec 6\alpha.\ \sec 8\alpha + \ldots\ldots$ *n* உறுப்புகள்.

7. $\sec\alpha.\ \sec 3\alpha + \sec 2\alpha.\ \sec 4\alpha + \sec 3\alpha.\ \sec 5\alpha + \ldots\ldots$ *n* உறுப்புகள்.
(செ. ப. 1940 மா.)

8. $\sec\alpha\ \sec(\alpha+\beta) + \sec(\alpha+\beta)\sec(\alpha+2\beta) + \sec(\alpha+2\beta)\ \sec(\alpha+3\beta) + \ldots\ldots$ *n* உறுப்புகள்.

9. $\tan\alpha.\ \tan 2\alpha + \tan 2\alpha.\ \tan 3\alpha + \tan 3\alpha.\ \tan 4\alpha + \ldots\ldots$ *n* உறுப்புகள்.

10. $\tan\alpha.\ \tan(\alpha+\beta) + \tan(\alpha+\beta)\ \tan(\alpha+2\beta) + \tan(\alpha+2\beta).\ \tan(\alpha+3\beta) + \ldots\ldots$ *n* உறுப்புகள்.
(ம. ப. 1971 செ.)

11. $\tan\frac{\theta}{2} \cdot \sec\theta + \tan\frac{\theta}{4} \cdot \sec\frac{\theta}{2} + \tan\frac{\theta}{8} \cdot \sec\frac{\theta}{4}$
+ ......... $n$ உறுப்புகள்.
(செ. ப. 1952 செ.)

12. $\tan\alpha + 2\tan 2\alpha + 2^2 \tan 2^2 \alpha$
+ ......... $n$ உறுப்புகள்.
(செ. ப. 1964 ஏ.)

13. $\frac{\sin x}{\cos 3x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3^2 x} + \frac{\sin 3^2 x}{\cos 3^3 x}$ + ...... $n$ உறுப்புகள்.

14. $\sin\alpha \cdot \sin 3\alpha + \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{3\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2^2} \cdot \sin\frac{3\alpha}{2^2}$
+ ...... $n$ உறுப்புகள்.
(செ. ப. 1951 செ.)

15. $\tan^{-1}\frac{2}{1+1.3} + \tan^{-1}\frac{2}{1+3.5} + \tan^{-1}\frac{2}{1+5.7}$
+ ......... $n$ உறுப்புகள்.

16. $\tan^{-1}\frac{2x}{1+1.3x^2} + \tan^{-1}\frac{2x}{1+3.5x^2}$
$+ \tan^{-1}\frac{2x}{1+5.7x^2}$ + ......... $n$ உறுப்புகள்.
(செ. ப. 1961 ஏ.)

17. $\tan^{-1}\frac{x}{1+1.2x^2} + \tan^{-1}\frac{x}{1+2.3x^2}$
$+ \tan^{-1}\frac{x}{1+3.4x^2}$ + ......... $n$ உறுப்புகள்.

18. $\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{13} + \tan^{-1}\frac{1}{21}$ + .........
......... $n$ உறுப்புகள்.
(செ. ப. 1965 செ.)

19. $\tan^{-1} 1 + \tan^{-1}\frac{3}{1+1^2.2^2} + \tan^{-1}\frac{5}{1+2^2.3^2}$ + ......
......... $n$ உறுப்புகள்.

20. $\tan^{-1}\frac{4}{1+3.4} + \tan^{-1}\frac{6}{1+8.9} + \tan^{-1}\frac{8}{1+15.16}$
+ ......... $n$ உறுப்புகள்.
(செ. ப. 1962 செ.; 1963 ஏ.)

21. $\tan^{-1}\frac{1}{2.1^2}+\tan^{-1}\frac{2}{2.2^2}+\tan^{-1}\frac{1}{2.3^2}$
$+ \ldots\ldots\ldots$ $n$ உறுப்புகள்.

22. $\tan^{-1}\frac{2}{1-1^2+1^4}+\tan^{-1}\frac{4}{1-2^2+2^4}$
$+\tan^{-1}\frac{6}{1-3^2+3^4}+\ldots\ldots\ldots$ $n$ உறுப்புகள்.

23. $\tan^{-1}\frac{1+3.1.2}{1+1^3.2^3}+\tan^{-1}\frac{1+3.2.3}{1+2^3.3^3}$
$+\tan^{-1}\frac{1+3.3.4}{1+3^3.4^3}+\ldots\ldots\ldots$ $n$ உறுப்புகள்.

24. $\cot^{-1}\left(2^2+\frac{1}{2}\right)+\cot^{-1}\left(2^3+\frac{1}{2^2}\right)$
$+\cot^{-1}\left(2^4+\frac{1}{2^3}\right)+\ldots\ldots\ldots\infty.$

25. $\sec^2\theta\,.\tan 2\theta = 2\tan 2\theta - 2\tan\theta$ என நிறுவி,
$\sec^2\theta.\tan 2\theta+\sec^2\frac{\theta}{2}.\tan\theta+\sec^2\frac{\theta}{4}.\tan\frac{\theta}{2}+\ldots\ldots\ldots$
என்ற தொடரின் $n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையையும், முடிவிலி வரை கூட்டுத் தொகையையும் காண்க.

26. $\sin^4\theta = \sin^2\theta - \frac{1}{4}\sin^2 2\theta$ என நிறுவி,
$\sin^4\theta+\frac{1}{4}\sin^4 2\theta+\frac{1}{4^2}\sin^4 4\theta+\frac{1}{4^3}\sin^4 8\theta+\ldots\ldots\ldots$
என்ற தொடரின் $n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையையும், முடிவிலி வரை கூட்டுத் தொகையையும் காண்க.

## விடைகள்

1. $\frac{1}{2\sin\theta}\left[\cot\theta-\cot(n+1)\theta\right]$

2. $\cot\frac{\theta}{2}-\cot 2^{n-1}\theta$

3. $\frac{1}{\sin\theta}\left[\cot\theta-\cot(n+1)\right]$

4. $\operatorname{cosec}2\theta\ \left[\cot\theta-\cot(2n+1)\theta\right]$

5. $\frac{1}{\sin x}\left[\tan(n+1)x-\tan x\right]$

6. $\operatorname{cosec} 2\alpha\,[\tan 2(n+1)\alpha - \tan 2\alpha]$

7. $\dfrac{1}{\sin 2\alpha}\,[\tan(n+1)\alpha + \tan(n+2)\alpha - \tan\alpha - \tan 2\alpha]$

8. $\dfrac{1}{\sin\beta}\,[\tan(\alpha + n\beta) - \tan\alpha]$

9. $\cot\alpha\,[\tan(n+1)\alpha - \tan\alpha] - n$

10. $\cot\beta\,[\tan(\alpha + n\beta) - \tan\alpha] - n$

11. $\tan\theta - \tan\dfrac{\theta}{2^n}$

12. $\cot\alpha - 2^n \cot 2^n\alpha$

13. $\dfrac{1}{2}\,[\tan 3^n x - \tan x]$

14. $\dfrac{1}{2}\left[\cos\dfrac{\alpha}{2^{n-2}} - \cos 4\alpha\right]$

15. $\tan^{-1}\dfrac{n}{n+1}$

16. $\tan^{-1}(2n+1)x - \tan^{-1}x$

17. $\tan^{-1}(n+1)x - \tan^{-1}x$

18. $\tan^{-1}\dfrac{n}{n+2}$

19. $\tan^{-1}n^2$

20. $\tan^{-1}(n+1)(n+2) - \tan^{-1}2$

21. $\tan^{-1}\dfrac{n}{n+1}$

22. $\tan^{-1}n(n+1)$

23. $\tan^{-1}(n+1)^3 - \tan^{-1}1$

24. $\cot^{-1}2$

25. $S_n = 2\tan 2\theta - 2\tan\left[\dfrac{\theta}{2^{n-1}}\right]$

$S_\infty = 2\tan 2\theta$

26. $S_n = \sin^2\theta - \dfrac{1}{4^n}\sin^2(2^n\theta)$

$S_\infty = \sin^2\theta$

## கலைச்சொற்கள்

| | |
|---|---|
| Addition | — கூட்டல் |
| Algebra | — இயற்கணிதம் |
| Algebra ; Real | — மெய் இயற்கணிதம் |
| Aliter | — மாற்று முறை |
| Amplitude | — வீச்சு, வீச்சம் |
| Anticlockwise | — இடஞ்சுழியாக |
| Application | — பயன் |
| Approximately | — தோராயமாக |
| Argand Diagram | — ஆர்கன் வரைபடம் |
| Argument | — மாறி |
| Arithmetic Progression | — கூட்டு விருத்தி |
| Axis | — அச்சு |
| Axis,. Imaginary | — கற்பனை அச்சு |
| Axis, Real | — மெய் அச்சு |
| Axes, Rectangular | — செங்குத்து அச்சுகள் |
| Cardioid | — இதயவுரு |
| Centroid | — மையக்கோட்டுச் சந்தி, நடுக் கோட்டுச் சந்தி |
| Clockwise | — வலஞ்சுழியாக |
| Coefficient | — குணகம் |
| Condition | — நிபந்தனை |
| Constant | — நிலையான, நிலை எண் |
| Continued Product | — தொடர் பெருக்கற் பலன் |
| Convergency | — ஒருங்கும் தன்மை |
| Co-ordinates | — கூறுகள் |
| Co-ordinates, Polar | — கோண தூரக் கூறுகள் |
| Co-ordinates, Rectangular | — செங்குத்துக் கூறுகள் |

Corollary — துணை முடிவு
Correct to — திருத்தமாக
Correspondence — ஒத்தியைபு

Decimal Places — தசமத் தானங்கள்
Define — வரையறு
Definition — வரையறை
Difference — வேறுபாடு
Difference, Common — பொது வேறுபாடு
Directly Similar — நேராக வடிவொத்த
Direction — திசை
Division — வகுத்தல்

Ellipse — நீள் வட்டம்
Equality — சமன்மை
Equation — சமன்பாடு
Equation, Cubic — முப்படிச் சமன்பாடு
Equation, *n* th degree — *n* - படிச் சமன்பாடு
Equation, Polar — கோண தூரச் சமன்பாடு
Equation, Trigonometrical — திரிகோண கணிதச் சமன்பாடு
Expansion — விரித்தல்
Expression — கோவை
Expression, General — பொதுக் கோவை
Expression, *n* th degree — *n* - படிக் கோவை

Factor — காரணி
Factor, Quadratic — இருபடிக் காரணி
Factor, Real Quadratic — மெய்யான இருபடிக் காரணி
Factorisation — காரணிப்படுத்தல்
Focus — குவியம்
Foci — குவியங்கள்
Form — வடிவம்
Fraction — பின்னம்
Fraction, Rational — விகித முறு பின்னம்
Function — சார்பு
Function, Circular — வட்டச் சார்பு
Function, Complex — சிக்கல் சார்பு
Function, Conjugate Complex — இணைச் சிக்கல் சார்பு
Function, Exponential — அடுக்குக்குறிச் சார்பு

| | |
|---|---|
| Function, Hyperbolic | — அதிபரவளைச் சார்பு |
| Function, Inverse | — நேர்மாறு சார்பு |
| Function, Inverse Circular | — நேர்மாறு வட்டச் சார்பு |
| Function, Inverse Hyperbolic | — நேர்மாறு அதிபரவளைச் சார்பு |
| Function, Inverse Trigonometrical | — நேர்மாறு திரிகோண கணிதச் சார்பு |
| Function, Many valued | — பன்மதிப்புடைச் சார்பு |
| Function, Periodic | — காலவட்ட ஒழுங்குடைய சார்பு |
| Function, Single valued | — ஒரு மதிப்புடைச் சார்பு |
| Function, Trigonometrical | — திரிகோண கணிதச் சார்பு |
| Functional Law | — சார்பு விதி |
| Fundamental Operations | — அடிப்படைச் செய்கைகள் |
| Geometry | — வரை கணிதம் |
| Geometrical Construction | — வரை கணித அமைப்பு |
| Imaginary Unit | — கற்பனை அலகு |
| Immediate Application | — உடனடிப் பயன் |
| Inclination | — சாய்வு |
| Inequality | — சமனின்மை |
| Infinite | — எண்ணற்ற |
| Infinity | — முடிவிலி |
| Inscribe | — உள்ளே வரை |
| Integer | — முழு எண் |
| Integer, Negative | — எதிர் முழு எண் |
| Integer, Positive | — நேர் முழு எண் |
| Inverse | — நேர் மாறு |
| Limit | — எல்லை |
| Locus | — இயங்கு வழி |
| Loci | — இயங்கு வழிகள் |
| Logarithm | — மடக்கை |
| Logarithm, Natural | — இயற்கை மடக்கை |
| Magnitude | — அளவு |
| Measure | — அளவை |
| Measure, Circular | — வட்ட அளவை |
| Measure, Radian | — ஆரையன் அளவை |
| Method | — முறை |

| | |
|---|---|
| Method, Difference | — வேறுபாட்டு முறை |
| Method, Geometrical | — வரை கணித முறை |
| Modulus | — மட்டு |
| Moduli | — மட்டுகள் |
| Multiple | — மடங்கு |
| Multiple, Odd | — ஒற்றை மடங்கு |
| Multiple, Even | — இரட்டை மடங்கு |
| Multiplication | — பெருக்கல் |
| Nearly | — ஏறத்தாழ |
| Number | — எண் |
| Number, Complex | — சிக்கல் எண் |
| Number, Conjugate Complex | — இணைச் சிக்கல் எண் |
| Number, Even | — இரட்டை எண் |
| Number, Imaginary | — கற்பனை எண் |
| Number, Irrational | — விகிதமுறு எண் |
| Number, Negative | — எதிர் எண் |
| Number, Odd | — ஒற்றை எண் |
| Number, Positive | — நேர் எண் |
| Number, Rational | — விகிதமுறு எண் |
| Number, Real | — மெய் எண் |
| Origin | — ஆதி |
| Parameter | — சாரா மாறி |
| Parameter, Real | — மெய்யான சாரா மாறி |
| Part | — பகுதி |
| Part, Imaginary | — கற்பனைப் பகுதி |
| Part, Real | — மெய்ப் பகுதி |
| Period | — கால வட்டம் |
| Periodicity | — கால வட்ட ஒழுங்குடைமை |
| Perpendicular Bisector | — நடுக்குத்துக் கோடு, மையக் குத்துக் கோடு |
| Plane | — தளம் |
| Plane, Argand | — ஆர்கன் தளம் |
| Plane, Complex | — சிக்கல் தளம் |
| Point | — புள்ளி |
| Point, Initial | — தொடக்கப் புள்ளி |
| Point, Terminal | — இறுதிப் புள்ளி |

Polygon — பலகோணம்
Polygon, Regular — ஒழுங்குப் பலகோணம்
Position — இடம்
Power — அடுக்கு
Powers, Ascending — ஏறு அடுக்குகள்
Powers, Descending — இறங்கு அடுக்குகள்
Product — பெருக்குத் தொகை
Projection — வீழ்ச்சி
Proof — நிறுவல்
Property — பண்பு

Quantity — கணியம்
Quantity, Complex — சிக்கல் கணியம்
Quantity, Indeterminate — தேராக் கணியம்

Radian — ஆரையன்
Radius — ஆரம்
Ratio — விகிதம்
Ratio, Common — பொது விகிதம்
Ratio, Trigonometrical — திரிகோண கணித விகிதம்
Reciprocal — தலைகீழ்
Represent — குறி
Representation — குறித்தல்
Representation, Geometrical — வரை கணித முறையில் குறித்தல்

Root — மூலம்
Root, Complex — சிக்கல் மூலம்
Roots, $n$ th — $n$ ஆம் மூலங்கள்

Segment — துண்டு
Segment of a circle — வட்டத் துண்டு
Series — தொடர்
Series, Absolutely Convergent — அறவொருங்குத் தொடர்
Series, Arithmetico-Geometric — கூட்டல் - பெருக்கல் தொடர்
Series, Binomial — ஈருறுப்புத் தொடர்
Series, Complex — சிக்கல் தொடர்
Series, Convergent — ஒருங்குத் தொடர்
Series, Exponential — அடுக்குக்குறித் தொடர்
Series, Geometric — பெருக்கல் தொடர்

Series, Gregory's — கிரிகரியின் தொடர்
Series, Infinite — முடிவிலாத் தொடர், கந்தழித் தொடர்
Series, Logarithmic — மடக்கைத் தொடர்
Series, Trigonometrical — திரிகோண கணிதத் தொடர்
Shortest Distance — மிகச் சிறு தொலைவு
Similar — வடிவொத்த
Sign — குறி
Sign, Negative — எதிர்க் குறி
Sign, Positive — நேர்க் குறி
Solve — தீர்
Solution — தீர்வு
Solution, General — பொதுத் தீர்வு
System — தொகுதி
System, Real Number — மெய் எண் தொகுதி
System, Imaginary Number — சிக்கல் எண் தொகுதி
Substitution — பிரதியீடு
Subtraction — கழித்தல்
Sum — கூட்டுத் தொகை
Summation of Series — தொடர் கூட்டல்

Theorem — தேற்றம்
Theorem, Binomial — ஈருறுப்புத் தேற்றம்
Trigonometry — திரிகோண கணிதம்

Valid — செல்லத்தக்க
Value — மதிப்பு
Value, Euler's — ஆய்லரின் மதிப்பு
Value, General — பொது மதிப்பு
Value, Negative — எதிர் மதிப்பு
Value, Positive — நேர் மதிப்பு
Value, Principal — முதன் மதிப்பு
Vector — திசையி
Vertex — உச்சி
Vertices — உச்சிகள்

Zero — பூச்சியம்

# BIBLIOGRAPHY


| | TITLE | AUTHORS |
|---|---|---|
| 1. | A NEW TRIGONOMETRY FOR SCHOOLS | W. G. Borchardt, M.A., B.Sc. & The Rev. A.D. Perrott |
| 2. | PLANE TRIGONOMETRY | J. Topping, M.Sc., Ph.D., D.Sc. |
| 3. | ELEMENTARY TRIGONOMETRY | H. S. Hall, M.A. & S. R. Knight, B.A., M.B., Ch.B. |
| 4. | TUTORIAL TRIGONOMETRY | W. B. Briggs, LL.D., M.A., B.Sc. & G. H. Bryan, Sc.D., F.R.S. |
| 5. | PLANE TRIGONOMETRY (PART I) | S. L. Loney |
| 6. | PLANE TRIGONOMETRY (PART II) | S. L. Loney |
| 7. | PLANE TRIGONOMETRY | H. S. Carslaw, Sc.D., D.Sc., LL.D. |
| 8. | TRIGONOMETRY (PART II—HIGHER TRIGONOMETRY) | T. M. Mac Robert, M.A., D.Sc. & William Arthur, M.A. |
| 9. | PLANE TRIGONOMETRY (ADVANCED SECTION) | I. Todhunter, Sc.D., F.R.S. |
| 10. | TRIGONOMETRY (PART III—ADVANCED TRIGONOMETRY) | T. M. Mac Robert, M.A., D.Sc. & William Arthur, M.A. |
| 11. | SHORTER ADVANCED TRIGONOMETRY | C. V. Durell, M.A. & A. Robson |
| 12. | A TREATISE ON PLANE TRIGONOMETRY | E. W. Hobson |

# தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

சென்னை

பின்வரும் பொருள்களில்

**பட்டப்படிப்பிற்குரிய நூல்கள்**

**விரைவில் வெளிவரும்**

| | | | |
|---|---|---|---|
| கணிதம் | — | 41 | நூல்கள் |
| பௌதிகம் | — | 28 | ,, |
| வேதியியல் | — | 39 | ,, |
| தாவரவியல் | — | 30 | ,, |
| விலங்கியல் | — | 40 | ,, |
| பொறியியல் | — | 50 | ,, |
| வரலாறு | — | 45 | ,, |
| அரசியல் | — | 34 | ,, |
| பொருளாதாரம் | — | 83 | ,, |
| வணிகவியல் | — | 36 | ,, |
| புள்ளியியல் | — | 16 | ,, |
| உளவியல் | — | 8 | ,, |
| புவியியல் | — | 18 | ,, |